Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics, 34, 2022. (65-88)

Ferdowsi University of Mashhad

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics

Page Journal: mechanic-ferdowsi.um.ac.ir



Dynamic Stability Analysis of Rectangular Mindlin Plate in Contact with Fluid under Passage of Oscillating Rigid Bodies

Research Article

Mehran Ghomeshi Bozorg[1]

DOI: 10.22067/jacsm.2022.71262.1037

1. Introduction

Investigating the dynamic stability of a flexible structure carrying a moving mass is an extensive problem embracing a wide variety of engineering applications, e.g., railway tracks and bridges under the action traversing trains or vehicles, loads transported along cranes span, and high-speed machining processes. Time-varying position of moving masses and considering all inertial components of the moving masses in the analysis leads to the appearance of time-varying matrices in the coefficients of the governing equation. The passage of continuous series of moving masses along the rectilinear path results in a parametrically excited system with periodic coefficients. In certain conditions, parametric excitations generate instability in the elastic structures under the moving masses. Therefore, the stability analysis of these systems is very important.

This study investigates the dynamic stability of a moderately thick rectangular plate floating on fluid under the periodic passage of oscillating rigid bodies. An approach based on Floquet theory is followed, contributing to a comprehensive evaluation of the influence of the moving object modeling method and contact of the plate with the fluid on the dynamic stability of the plate vibrations. To the best of the author's knowledge, the stability analysis concerning the aforementioned aspects has not been done yet. The results are presented as stability maps in mass–velocity planes. These results show that the modeling method and the value of the model parameters impact significantly the system stability.

2. Mathematical formulation

In this study, a uniform, moderately thick rectangular plate floating on stationary fluid and traversed by moving objects is considered. It is assumed that moving objects move along a rectilinear trajectory parallel to longitude edges of the plate with a constant velocity of V. For fluid, inviscid and incompressible fluid flow is assumed. Letters a, b and h stand for the length, width and thickness of the rectangular plate, respectively and h_f stands for the depth of the fluid.

The material of the plate is assumed to be undamped linear isotropic homogeneous with Young's modulus E, the density ρ, and Poisson's ratio ν. For the moving object, a moving oscillating rigid body with a two wheels suspension system is considered (Figure 1). In this model, the moving object chassis is considered a rigid body with a length L_0, mass M_2 and moment of inertia about the center of mass $\overline{I}$. w_{M_2} is the transverse displacement of the center of mass, and ψ and θ denote the rotations about parallel and vertical axes to the plate, respectively.

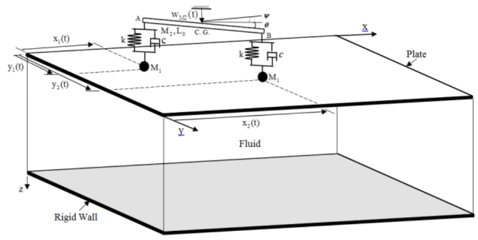


Figure 1. Rectangular plate floating on fluid under the effect of a moving oscillating rigid body

M_1 is the mass of each wheel, and k and c are the stiffness and damping of each suspension system, respectively. The fluid loading effect on the plate is modelled using the method of added mass. Through the use of the Mindlin plate theory, the assumed–mode method, Lagrange's equations and selecting the first vibrational mode of the plate in the assumed-mode method, the governing equations of a simply supported rectangular plate under the moving oscillating rigid body can be written as follows:

$$m(t)\ddot{\eta}+c(t)\dot{\eta}+k(t)\eta=f(t) \quad (1)$$

Here, $\eta=\left[A_1^{\psi_x},A_1^{\psi_y},A_1^{w},w_{M_2},\theta\right]^T$ and $A_1^{\psi_x}$, $A_1^{\psi_y}$ and A_1^{w} are the modal coordinates and the coefficient matrices $m(t)$, $c(t)$, $k(t)$ and vector $f(t)$ are all time-varying. By considering the entrance of a similar object on the plate following the exiting of the precedent object, the coefficients of Equation 1 become periodical with the period $T_p=(a+L_0)/V$.

*Manuscript received: January 24, 2022, Revised, April 13, 2022, Accepted, November 13, 2022.

[1]. Assistant Professor, Mechanical Engineering Department, Dezful University of Technology, Dezful, Iran.
Email: m.ghomeshibozorg@jsu.ac.ir

In order to obtain general results, the following parameters are defined.

$$\Omega=\pi^2 h\sqrt{\frac{E}{12\rho\left(1-\nu^2\right)}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right),\qquad I_A=\int_{-h/2}^{h/2}\rho dz,$$
$$m_f=-\frac{\rho_f}{\mu}\left[\frac{e^{-2\mu h_f}+1}{e^{-2\mu h_f}-1}\right],\ \mu=\pi\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}},\ \bar{m}_f=\frac{m_f}{I_A}$$
$$\alpha=\frac{2M_1+M_2}{I_A ab},\qquad \gamma=\frac{\pi V}{a\Omega},\qquad \bar{\Omega}=\gamma\Omega, \tag{2}$$
$$r=\frac{2M_1}{2M_1+M_2},\qquad \Omega_0=\sqrt{\frac{2k}{M_2}},\qquad \xi=\frac{2c}{2\Omega_0 M_2},$$

Here m_f and ρ_f are added mass and density of the fluid, respectively.

3. Floquet theory

Floquet theory is a general theory for linear differential equations with periodic coefficients. This theory can be performed on any equation in the form

$$\dot{q}=R(t)q,\ \ R(t+T_p)=R(t) \tag{3}$$

According to the periodicity of $R(t)$, it can be deduced that $R(t+T_p)$ also forms a fundamental set of solutions and the following relation can be established

$$q(t+T_p)=Cq(t) \tag{4}$$

where C is a fundamental matrix solution of the periodic system (3). According to Floquet theory, computing the eigenvalues of the fundamental matrix determines the stability conditions as $\|\lambda_C\|\le 1$.

4. Results and discussion

Throughout this study, the mechanical and geometrical properties of the plate are Young's modulus $E=200\,\text{Gpa}$, density $\rho=7800\,\text{kg/m}^3$, Poisson's ratio $\nu=0.3$, length $a=5\text{m}$, width $b=1\text{m}$, and thickness $h=0.1\text{m}$. The effect of varying ξ,Ω_0,r,L_0 and $\bar{m}_f$ on instability boundary in the α-γ plane have been evaluated. For example, the results for parameters Ω_0,r and $\bar{m}_f$ have been presented in Figure 2, 3 and 4, respectively.

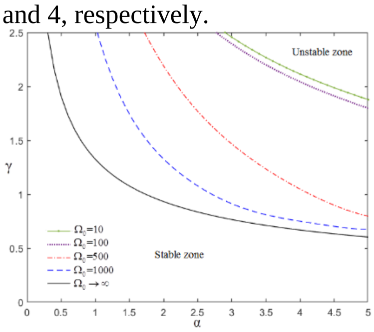


Figure 2. The impact of varying the frequency Ω_0 on the stability map ($r=0.05,\xi=1,L_0=1m,\bar{m}_f=1$)

The results show that increasing each of the parameters ξ,Ω_0 and r cause the unstable zone to increase. The trend is revised for L_0 and $\bar{m}_f$. The effect of the modelling approach for moving objects on the stable/unstable border line was investigated. Figure 5 depicts the results of the Floquet theory for moving point mass and moving oscillating rigid body.

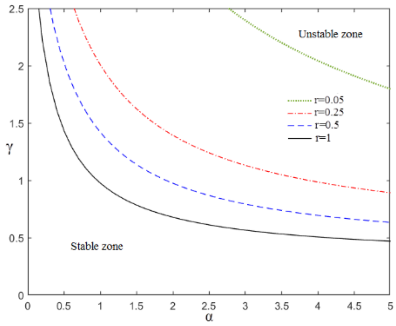


Figure 3. The impact of varying the mass ratio r on the stability map ($\Omega_0=100,\xi=1,L_0=1m,\bar{m}_f=1$)

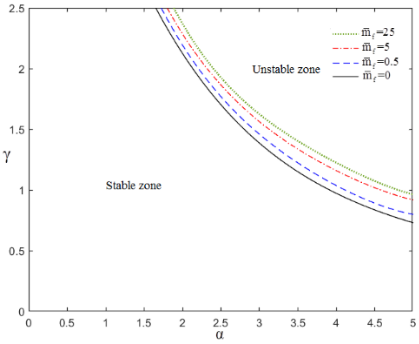


Figure 4. The impact of varying the non-dimensional added mass parameter $\bar{m}_f$ on the stability map ($r=0.05,\xi=1,L_0=1m,\Omega_0=500$)

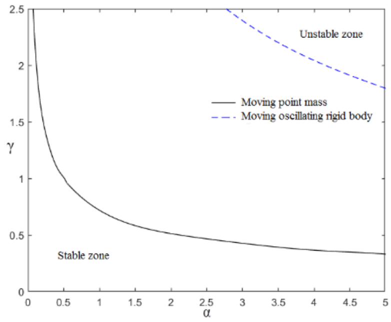


Figure 5. The impact of modeling approach on stability map: moving point mass (solid line), moving oscillating rigid body ($r=0.05,\xi=1,\Omega_0=100,L_0=1m,\bar{m}_f=1$) (dashed line)

As can be seen, modeling approach has a significant influence on the results. The results are confirmed through numerical simulations.

5. Conclusion

Using Floquet theory, this study investigated the time-domain analysis of a moderately thick rectangular plate floating on fluid, subjected to the periodic passage of vehicles. For the moving object, instead of moving point mass, a moving oscillating rigid body with a two- wheels suspension system was used. The results permitted splitting the speed-mass parameter plane into two distinct regions of stability and instability. For the oscillating rigid body, the effects of various parameters on the stability conditions were discussed in detail. The results showed that the modeling method for moving objects has a significant impact on the dynamic stability analysis of this system and inappropriate modeling leads to inaccurate results.

علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک

http://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir



آنالیز پایداری دینامیکی ورق میندلین مستطیلی در تماس با سیال تحت عبور جسم‌های صلب نوسان کننده*

مقاله پژوهشی

مهران قمشی بزرگ(۱)

DOI: 10.22067/jacsm.2022.71262.1037

چکیده *در این مقاله، پایداری دینامیکی یک ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم شناور بر روی یک سیال ساکن تحت حرکت متناوب جسم‌های صلب نوسان کننده متحرک مطالعه شده است. هر دو انتهای جسم صلب از طریق یک سیستم تعلیق به یک چرخ متصل شده‌اند. اثر نیروی سیال بر روی ورق با استفاده از روش جرم افزوده مدل شده است. با استفاده از روش مودهای فرضی، مبتنی بر تئوری ورق میندلین معادلات حاکم استخراج شده‌اند. تئوری فلاکه به عنوان یک روش عددی برای تعیین نواحی پایدار و ناپایدار در صفحه پارامترها به کار گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن مدل جسم نقطه‌ای متحرک، اثر مدل‌سازی جسم متحرک بر روی نتایج آنالیز پایداری نیز بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که تماس ورق با سیال، شرایط مرزی ورق، ضخامت ورق، سختی و میرایی سیستم تعلیق، نسبت جرم چرخ به جرم کل جسم صلب، طول جسم صلب و روش مدل‌سازی بر روی نواحی پایدار و ناپایدار سیستم کاملاً مؤثر هستند.*

واژه‌های کلیدی ورق میندلین، جسم صلب نوسان کننده، پایداری دینامیکی، تئوری فلاکه.

Dynamic Stability Analysis of Rectangular Mindlin Plate in Contact with Fluid under Passage of Oscillating Rigid Bodies

M. Ghomeshi Bozorg

Abstract *In this paper, the dynamic stability of a moderately thick rectangular plate floating on stationary fluid under the periodic passage of oscillating rigid bodies is studied. Each of the two ends of a rigid body is connected to a wheel through a suspension system. The fluid loading effect on the plate is modelled using the method of added mass. Using the assumed-mode method, the governing equations are derived based on the Mindlin plate theory. The Floquet theory is employed as a numerical method to obtain stable and unstable zones of the parameters plane. Considering the point moving object model, the effect of moving object modelling on the stability analysis results is also investigated. The results indicate that contact of the plate with the fluid, the plate boundary conditions, the plate's thickness, the stiffness and damping of the suspension system, the mass ratio of the wheels to the whole rigid body, the rigid body's length and the moving object modelling method are very effective in domains stability and instability of the system.*

Key Words Mindlin Plate, Oscillating Rigid Body, Stability Analysis, Floquet Theory

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۰/۴/۱۱ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۱/۸/۲۲ می‌باشد.

(۱) نویسنده مسئول، استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی جندی شاپور.

Email: m.ghomeshibozorg@jsu.ac.ir

مقدمه

مطالعه رفتار دینامیکی سازه‌های الاستیک تحت اثر بارهای متحرک یک موضوع مهم با کاربردهای گسترده صنعتی است که از نتایج حاصل از این مطالعه در مسائلی نظیر طراحی پل‌های بزرگراه‌ها، عرشه کشتی‌های حامل هواپیماها و خطوط ریلی تحت عبور وسایل نقلیه [1]، سازه‌های جرثقیل‌های سقفی و تسمه نقاله‌ها [2] و ماشین‌های ابزار با قابلیت ماشین کاری سریع [3] استفاده می‌شود.

یک بررسی جامع از پاسخ دینامیکی تیرها و صفحات تحت بارهای متحرک متمرکز و توزیع شده توسط فریبا [4] ارائه شده است. نیکخو و همکاران [5] پاسخ دینامیکی یک صفحه نازک مستطیلی تحت عبور یک جرم متحرک را تجزیه و تحلیل کردند. آنها از روش بسط تابع ویژه برای حل معادله حرکت صفحه استفاده کردند و لزوم لحاظ اینرسی جرم متحرک در معادلات حاکم را نشان دادند. قزوینی و همکاران [6] از یک روش محاسباتی برای بررسی رفتار دینامیکی یک صفحه مستطیلی با سطح مقطع متغیر تحت عبور یک جرم متحرک استفاده کردند. تجزیه و تحلیل ارتعاش صفحه تحریک شده توسط یک جرم متمرکز متحرک با استفاده از روش المان محدود توسط اسن [7] انجام شد. یک تکنیک جامع بر اساس روش ریلی – ریتز (Rayleigh–Ritz) برای تعیین پاسخ دینامیکی یک صفحه مستطیلی تحت تأثیر بارهای متحرک توسط سونگ و همکارانشان [8] ارائه شد. آنها نشان دادند که همگرایی و دقت این روش بهتر از روش اجزای محدود است. کاشانی‌راد و همکاران [9] به منظور استخراج معادلات حاکم بر ارتعاشات صفحات چند دهانه‌ای تحت عبور جرم متحرک، از اصل هامیلتون استفاده کردند و از روش ماتریس نمایی (Matrix Exponential) جهت معادلات استفاده کردند. آنها صفحات را فاقد هرگونه تکیه‌گاه در لبه‌های طولی و دارای تکیه‌گاه ساده در لبه‌های عرضی در نظر گرفتند. کریمی و همکاران [10] در مسئله ورق – جرم متحرک دو حالت کلی را در نظر گرفتند. آنها در حالت اول مقدار نیرویی را که لازم است بر جرم متحرک وارد شود تا در یک مسیر مستقیم یا دایره‌ای بر روی ورق حرکت کند، مورد مطالعه قرار دادند و در حالت دوم اثر ارتعاشات عرضی ورق را بر روی مسیر حرکت و سرعت جسم متحرک بررسی کردند. بسکو و همکاران [11] پاسخ دینامیکی یک صفحه نازک الاستیک واقع بر روی بستر الاستیک ناهمسانگرد و تحت یک بار مستطیلی متحرک را به صورت تحلیلی به دست آوردند. صیفوری و همکاران [12] به تفصیل تنظیمات آزمایش طراحی شده برای سنجش تجربی پاسخ دینامیکی یک صفحه مستطیلی نازک با شرایط مرزی گیردار تحت عبور جرم متحرک را شرح دادند و نتیجه تجربی به دست آمده را با حل‌های نظری مقایسه کردند و اثر سرعت و جرم جسم متحرک و ضخامت ورق را بر روی پاسخ دینامیکی نقطه میانی ورق بررسی کردند.

مسئله اندرکنش سیال – سازه توجه قابل ملاحظه‌ای را در بین محققان به خود جلب کرده است. برخی از مطالعات انجام شده در این زمینه، معطوف به بررسی جنبه‌های مختلف رفتار دینامیکی ورق در تماس با سیال است. کانالس و همکاران [13] تجزیه و تحلیل ارتعاشات ورق میندلین غوطه‌ور در سیال را با استفاده از روش ریتز ارائه کرده و با استفاده از روش المان محدود سه‌بعدی اعتبارسنجی کردند. خورشیدی و همکاران [14] ارتعاش ورق کیرشهف (Krichhoff plate) غوطه‌ور در سیال را به ترتیب با استفاده از روش ریتز و روش تست آکوستیک به صورت تئوری و تجربی تجزیه و تحلیل کردند. بوچکارف و همکاران [15] با استفاده از ارتعاش سنج لیزری دیجیتال فرکانس‌های ارتعاشات آزاد صفحات مستطیلی غوطه‌ور در یک سیال را به طور تجربی اندازه‌گیری کردند. لی و همکاران [16] با استفاده از تئوری ورق میندلین (Mindlin plate) ارتعاشات آزاد ورق‌های مدرج تابعی که فقط بخشی از ورق در یک سیال تراکم‌ناپذیر و غیرلزج غوطه‌ور است را تجزیه و تحلیل کردند. آنها اثر بارگذاری سیال بر روی ورق را با استفاده از روش جرم افزوده (Added Mass) مدل‌سازی کردند. لیو و همکاران [17] با استفاده از روش ریلی – ریتز، برای یک ورق نازک واقع در پایین یک ظرف مستطیلی‌شکل پر شده از یک سیال، فرکانس ارتعاشات آزاد و شکل مود مربوطه را تعیین کردند. آنها سیال را تراکم‌پذیر و غیرلزج فرض کردند. کربووا و همکاران [18] با استفاده از ترکیب روش اجزای محدود و تئوری پوسته ساندرز (Sanders' shell theory) ارتعاشات ورق‌های مستطیلی غوطه‌ور یا شناور بر روی سطح سیال را مورد مطالعه قرار دادند و فرکانس ارتعاشات آزاد و شکل مودهای مربوطه را تعیین کردند. سونی و همکاران [19] یک روش نیمه‌تحلیلی را برای تعیین فرکانس پایه ورق‌های مستطیلی دارای ترک و در تماس با سیال، پیشنهاد دادند. آنها هر

دو مدل غوطه‌وری کامل و جزئی را برای ورق در نظر گرفتند و ترک در تیر را به صورت یک فنر خطی مدل کردند و از تئوری ورق کلاسیک برای ورق استفاده کردند. یوسف‌زاده و همکاران [20] ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیلی مدرج تابعی نسبتاً ضخیم شناور بر روی سطح یک سیال غیرقابل تراکم و لزج را بررسی کردند. معادلات حاکم را مبتنی بر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج کرده و از طریق مجزاسازی معادلات حاکم، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق را استخراج کردند. آنها در یک مطالعه دیگر [21] پاسخ دینامیکی یک ورق مستطیلی مدرج تابعی شناور بر روی سطح یک سیال ساکن و تحت بار نقطه‌ای متحرک را مورد مطالعه قرار دادند. آنها برای استخراج معادلات حاکم با صرف‌نظر از اثر اینرسی بار متحرک، آن را به صورت یک نیروی نقطه‌ای متحرک مدل کردند و برای مطالعه اثر فشار اعمال شده از سیال بر روی سطح ورق از مدل‌سازی جرم افزوده استفاده کردند.

در سازه‌های تحت عبور جرم متحرک به دلیل تغییر در موقعیت جرم متحرک بر روی سازه، در شرایطی که تمام مؤلفه-های شتاب جرم متحرک در مطالعه لحاظ می‌شود ضرایب معادلات حاکم بر ارتعاشات این سیستم‌ها با زمان تغییر می‌کنند و بر این اساس این سیستم‌ها جزو سیستم‌های متغیر با زمان دسته‌بندی می‌شوند. این ضرایب وابسته به زمان می‌توانند نقش تحریکی موسوم به تحریک پارامتریک را برای سیستم ایفا کنند. این نوع تحریک در شرایط معینی می‌تواند سبب بروز ناپایداری دینامیکی و یا به عبارت دیگر سبب تشدید پارامتریک در سازه الاستیک تحت بار متحرک شود. بنابراین برای حفاظت از سیستم تحت بار متحرک، شناخت شرایطی که سبب بروز ناپایداری دینامیکی می‌شود از اهمیت فراوانی برخوردار است. به نظر می-رسد که برای اولین بار نلسون و کانوور [22] برای تیر اولر–برنولی با تکیه‌گاه ساده و تحت اثر عبور جرم‌های متحرک، نواحی پایدار و ناپایدار را در فضای پارامترهای سیستم تعیین کردند. آلدریم و باز [23] با استفاده از تئوری تحریک تکانشی، پایداری تیر تحت اثر حرکت متناوب جرم‌های متحرک را مطالعه کردند. ماکرتیچ [24] برای مطالعه پایداری دینامیکی سیستم تیر – جرم متحرک برای هر دو مدل تیر اولر – برنولی و تیموشنکو از روش تئوری فلاکه (Floquet theory) استفاده کرد. رائو [25] از روش مقیاس چندگانه (Multiple scales) جهت بررسی پایداری دینامیکی تیر اولر – برنولی تحت بار متحرک استفاده کرد. ابراهیم‌زاده و همکاران [26] برای یک ورق مستطیلی نازک تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک، رفوئی و همکاران [27] برای یک ورق نازک با شرایط مرزی دلخواه تحت عبور جرم متحرک و دارای وصله‌های پیزوالکتریک و نیکخو و همکاران [28] در مطالعه یک ورق مستطیلی نازک تحت عبور دو دسته جرم که در دو مسیر مخالف بر روی ورق حرکت می‌کردند، مقادیر سرعتی از جرم متحرک که سبب بروز تشدید در ورق می‌شوند را معرفی کردند. ترکان و همکاران [29] پایداری دینامیکی ورق مستطیلی نازک با تکیه‌گاه ساده تحت عبور پی‌درپی جرم‌های متحرک را با استفاده از روش پارامترهای فشرده (Strained parameters) مطالعه کردند. آنها در مطالعه دیگری [30] برای سه حالت حرکت متوالی جرم‌های متحرک بر روی خط راست، خط مورب و مسیر دایره‌ای بر روی یک ورق نسبتا ضخیم، با استفاده از روش هارمونیک بالانس نموی (Incremental harmonic balance) نواحی پایدار و ناپایدار را در صفحه پارامترهای جسم متحرک تعیین کردند. پیرمرادیان و همکاران [31] با در نظر گرفتن اثر ترم‌های غیرخطی ناشی از جابه‌جایی‌های بزرگ در تیر، پایداری دینامیکی سیستم تیر– جرم متحرک را مطالعه کردند. در تمام این مطالعات جرم متحرک به صورت یک جرم نقطه‌ای و متمرکز مدل شده است. واثقی امیری و همکاران [32] در بررسی ارتعاشات یک ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم با شرایط مرزی دلخواه و تحت عبور جرم متحرک، برای تعیین محدوده مقادیر سرعت جسم متحرک که سبب بروز پاسخ فزاینده در ورق می‌شود از مدل بار توزیع شده برای جسم متحرک استفاده کردند. هاشمیان و همکاران [33] با استفاده از روش هارمونیک بالانس نموی پایداری دینامیکی یک نانو تیر تیموشنکو با تکیه‌گاه ساده و واقع بر بستر الاستیک پاسترناک (Pasternak) را که تحت حرکت متوالی نانوذرات قرار دارد مطالعه کردند و نواحی پایدار و ناپایدار را در صفحه جرم– سرعت جسم متحرک مشخص کردند. پیرمرادیان و همکاران [34] با استفاده از روش نرخ انرژی (Energy-rate method) پایداری دینامیکی یک نانوصفحه را که همزمان تحت بار الکترومکانیکی و نانوذرات قرار دارد مورد بررسی قرار داده و مرزهای ناپایداری را در صفحه پارامترها تعیین کردند.

بررسی مطالعات انجام شده در زمینه آنالیز پایداری دینامیکی

سیستم‌های الاستیک تحت عبور جسم متحرک نشان می‌دهد که اثر تماس سیال با بستر الاستیک تحت عبور جرم متحرک بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم بررسی نشده است و همچنین محدود شدن مدل‌سازی جسم متحرک به دو صورت نیرو یا جرم نقطه‌ای متحرک سبب شده تا فقط اثر دو پارامتر جرم و سرعت جسم متحرک بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی مورد توجه قرار گیرد و به تأثیر مشخصات دیگر نظیر سختی و میرایی سیستم تعلیق، نسبت جرم چرخ به جرم کل جسم و طول جسم متحرک، که در یک مدل مناسب برای یک وسیله نقلیه می‌تواند مطرح باشد، توجه لازم انجام نشود. در این مطالعه به منظور بررسی دقیق‌تر شرایط پایداری دینامیکی یک بستر الاستیک تحت عبور وسایل نقلیه، با در نظر گرفتن یک مدل کامل‌تر برای این سیستم، آنالیز پایداری دینامیکی انجام شده است. به این ترتیب که وسیله نقلیه به صورت جسم صلبی که از هر دو انتها از طریق یک سیستم تعلیق به چرخی متصل می‌شود مدل شده و بستر الاستیک نیز به صورت یک ورق نسبتاً ضخیم که در بخش تحتانی در تماس با یک سیال قرار دارد در نظر گرفته شده است و سعی شده تا در یک بررسی جامع، علاوه بر مورد توجه قراردادن اثر جرم و سرعت جسم متحرک، اثر مقادیر سختی و میرایی سیستم تعلیق، نسبت جرم چرخ‌ها به جرم کل جسم متحرک، طول جسم متحرک و اثر تماس سیال با ورق بر روی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار در صفحه پارامترها بررسی شده و از این جنبه مطالعات گذشته تکمیل شود. نتایج مبین اهمیت انتخاب مدل مناسب برای جسم متحرک، اثر تماس سیال با ورق و مقادیر پارامترهای فیزیکی مدل منتخب بر روی شرایط پایداری دینامیکی سیستم هستند.

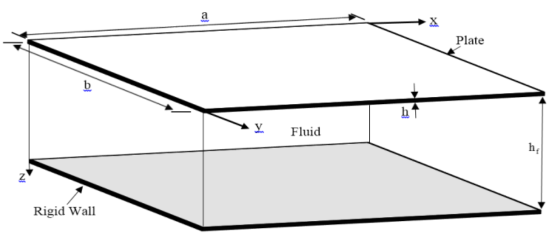
مدل‌سازی دینامیکی

در این پژوهش، مطابق شکل (۱)، بستر جسم متحرک به صورت یک ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم، به طول a، عرض b و ضخامت h در نظر گرفته می‌شود. ماده ورق همگن و ایزوتروپیک با مدول الاستیسیته‌ی E، چگالی ρ، مدول برشی G و ضریب پواسون ν است. فرض می‌شود که وجه تحتانی ورق در تماس با یک سیال ساکن غیرقابل تراکم و غیرلزج با چگالی ρ_f و به عمق h_f قرار دارد. محورهای دستگاه مختصات کارتزین x، y و z به ترتیب در امتداد طول، عرض و ضخامت ورق در نظر گرفته شده و محورهای x و y در صفحه میانی ورق تغییر شکل نیافته، واقع شده‌اند. برای نشان دادن مؤلفه‌های جابه‌جایی نقاط ورق در امتداد محورهای x، y و z به ترتیب از نماد u_x، u_y و w استفاده می‌شود. مطابق با تئوری ورق میندلین، مؤلفه‌های جابه‌جایی به صورت بیان می‌شوند که در آن ψ_x و ψ_y به ترتیب جابه‌جایی‌های زاویه‌ای حول محورهای y و x هستند.

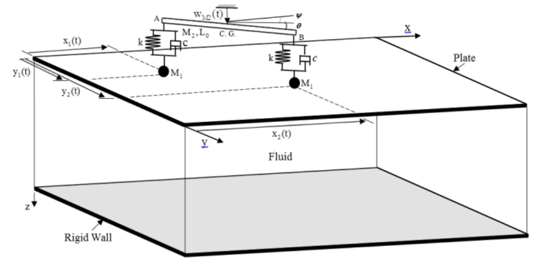
$$u_x=-z\psi_x(x,y,t)$$
$$u_y=-z\psi_y(x,y,t)$$
$$w=w(x,y,t)$$

(۱)

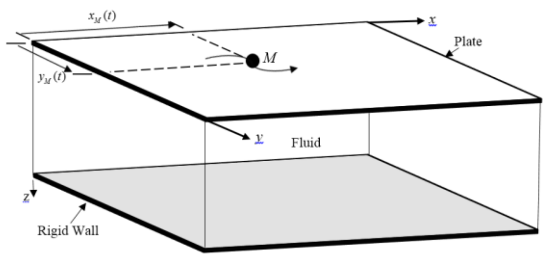
برای جسم متحرک دو مدل جسم صلب نوسان‌کننده متحرک و جرم نقطه‌ای متحرک درنظرگرفته شده است. شماتیک این دو مدل به ترتیب در شکل (۲) و (۳) نشان داده شده‌اند. در مدل جرم نقطه‌ای متحرک، جسم متحرک به صورت یک جرم متمرکز به جرم M در نظر گرفته می‌شود که موقعیت آن بر روی ورق در هر لحظه توسط مختصات (x_M,y_M,w_M) بیان می‌شود. اما در مدل جسم صلب نوسان‌کننده متحرک که مدلی کامل‌تر برای یک وسیله نقلیه به شمار می‌رود، شاسی جسم متحرک به صورت یک جسم صلب به جرم M_2 و طول L_0 و گشتاور اینرسی حول مرکز جرم $\bar{I}$ در نظر گرفته شده است که از هر دو انتها از طریق یک سیستم تعلیق یکسان به چرخی به جرم M_1 متصل شده است. هر سیستم تعلیق متشکل از یک فنر به ضریب سختی k و یک دمپر با ضریب میرایی لزجتی c است. موقعیت چرخ جلو و عقب بر روی سطح ورق در هر لحظه به ترتیب با مختصات (x_1,y_1,w_1) و (x_2,y_2,w_2) نشان داده شده‌اند. هر دو مختص w_1 و w_2 از سطح ورق سنجیده می‌شوند. موقعیت مرکز جرم جسم صلب در هر لحظه توسط مختصات $(x_{M_2},y_{M_2},w_{M_2})$ مشخص می‌شود که w_{M_2} از موقعیت تعادل استاتیکی اندازه‌گیری می‌شود. ψ زاویه چرخش جسم صلب متحرک حول محور عمود بر صفحه ورق و زاویه θ میزان چرخش جسم صلب حول محور موازی با سطح ورق و عمود بر امتداد طولی جسم صلب است.



شکل ۱ ورق مستطیلی در تماس با سیال



شکل ۲ ورق مستطیلی در تماس با سیال تحت اثر عبور جسم صلب نوسان کننده متحرک



شکل ۳ ورق مستطیلی در تماس با سیال تحت اثر عبور جرم نقطه‌ای متحرک

معادلات حاکم بر دینامیک سیستم ورق- جسم صلب نوسان‌کننده متحرک

جهت استخراج معادلات حاکم از روش مودهای فرضی استفاده می‌شود. برای استفاده از این روش، ابتدا عبارت انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم ورق-جسم صلب نوسان‌کننده متحرک نوشته می‌شوند. عبارت انرژی کرنشی بخشی از عبارت انرژی پتانسیل سیستم است که برای تعیین آن لازم است تا مؤلفه‌های میدان کرنش و تنش ورق بیان شوند. با استفاده از مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی (۱)، مؤلفه‌های کرنش به صورت (۲) حاصل می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z\psi_{x,x} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z\psi_{y,y} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}z\left(\psi_{x,y}+\psi_{x,y}\right) \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}\left(\psi_x - w_{,x}\right) \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = -\frac{1}{2}\left(\psi_y - w_{,y}\right)
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

و با در نظر گرفتن حالت تنش صفحه‌ای، طبق قانون هوک، مؤلفه‌های میدان تنش به صورت:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(-z\psi_{x,x} - \nu z\psi_{y,y}\right) \\
\sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(-z\psi_{y,y} - \nu z\psi_{x,x}\right) \\
\sigma_{xy} &= -Gz\left(\psi_{x,y}+\psi_{y,x}\right) \\
\sigma_{xz} &= -k_s G\left(\psi_x - w_{,x}\right) \\
\sigma_{yz} &= -k_s G\left(\psi_y - w_{,y}\right)
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

به دست می‌آیند که در آن k_s ضریب اصلاح برش ورق است که مقدار آن $\frac{5}{6}$ در نظر گرفته می‌شود. بر این اساس عبارت انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم به صورت (٤) می‌توانند نوشته شوند:

$$
\begin{aligned}
KE =& \frac{1}{2}\iint_A \left[\int_{-h/2}^{h/2} \rho\left(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2\right)dz\right] dA \\
&+ \frac{1}{2}M_1\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\chi_1\dot{w}^2{}_1\right) + \frac{1}{2}M_1\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\chi_2\dot{w}^2{}_2\right) \\
&+ \frac{1}{2}M_2\left(\dot{x}_{M_2}^2+\dot{y}_{M_2}^2+\dot{w}^2{}_{M_2}\right) + \frac{1}{2}\bar{I}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\dot{\psi}^2 \\
PE =& \frac{1}{2}\iint_A \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\sigma_{zz}\varepsilon_{zz} \right. \\
&\left. +2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy}+2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz}+2\sigma_{yz}\varepsilon_{yz})dz\right] dA \\
&+ \frac{1}{2}k\left(\left(w_{M_2}+\delta_0+\frac{L_0}{2}\sin(\theta)\right)-\chi_1 w_1\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2}k\left(\left(w_{M_2}+\delta_0-\frac{L_0}{2}\sin(\theta)\right)-\chi_2 w_2\right)^2 \\
&- \chi_1 M_1 g w_1 - \chi_2 M_1 g w_2 - M_2 g w_{M_2}
\end{aligned}
\tag{٤}
$$

که در آن

$$
\chi_1 = H(t-\hat{t}_1) - H(t-\hat{t}_2) \qquad \chi_2 = H(t-\hat{t}_3) - H(t-\hat{t}_4) \tag{٥}
$$

و $H(t-\hat{t}_i),\ i=1,2,3,4$ نماد تابع هیویساید (Heaviside function) است که به صورت:

$$
H(t-\hat{t}_i) = \begin{cases} 0 & t < \hat{t}_i \\ 1 & t \geq \hat{t}_i \end{cases} \quad i=1,2,3,4 \tag{٦}
$$

تعریف می‌شود که در آن $\hat{t}_1$ و $\hat{t}_3$ به ترتیب لحظه ورود چرخ جلو و عقب بر روی ورق و $\hat{t}_2$ و $\hat{t}_4$ به ترتیب لحظه خروج چرخ جلو و عقب از روی ورق هستند. δ_0 تغییر شکل استاتیکی ایجاد شده در فنر سیستم تعلیق تحت اثر نیروی وزن جرم M_2 است که به صورت $\delta_0=\frac{M_2 g}{2k}$ محاسبه می‌شود. w_1

و $\dot{w}_1$ به ترتیب موقعیت و سرعت عرضی جرم M_1 چرخ جلو و w_2 و $\dot{w}_2$ نیز به ترتیب موقعیت و سرعت عرضی جرم M_1 چرخ عقب را نشان می‌دهند. با جایگذاری عبارات (۱) تا (۳) در عبارت انرژی جنبشی و پتانسیل (٤)، عبارت (۷) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
KE=&\frac{1}{2}\iint_A\left[I_D\left(\dot{\psi}_x^2+\dot{\psi}_y^2\right)+I_A\dot{w}^2\right]dA\\
&+\frac{1}{2}M_1\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\chi_1\dot{w}^2{}_1\right)\\
&+\frac{1}{2}M_1\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\chi_2\dot{w}^2{}_2\right)\\
&+\frac{1}{2}M_2\left(\dot{x}_{M_2}^2+\dot{y}_{M_2}^2+\dot{w}^2{}_{M_2}\right)\\
&+\frac{1}{2}\bar{I}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\bar{I}\dot{\psi}^2\\
PE=&\frac{1}{2}\iint_A\Big[E_D\left(\psi_{x,x}^2+\psi_{y,y}^2+2\nu\psi_{x,x}\psi_{y,y}\right)\\
&+G_D\left(\psi_{x,y}^2+\psi_{y,x}^2+2\psi_{x,y}\psi_{y,x}\right)\\
&+k_sG_A\left(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_{z,x}^2+\psi_{z,y}^2-2\psi_x\psi_{z,x}-2\psi_y\psi_{z,y}\right)\Big]dA\\
&+\frac{1}{2}k\left(\left(w_{M_2}+\delta_0+\frac{L_0}{2}\sin(\theta)\right)-\chi_1w_1\right)^2\\
&+\frac{1}{2}k\left(\left(w_{M_2}+\delta_0-\frac{L_0}{2}\sin(\theta)\right)-\chi_2w_2\right)^2\\
&-\chi_1M_1gw_1-\chi_2M_1gw_2-M_2gw_{M_2}
\end{aligned} \qquad (۷)$$

که در این روابط پارامتر های I_A، I_D، G_A، G_D و E_D بـه صورت:

$$\begin{aligned}
(I_A,I_D)&=\int_{-h/2}^{h/2}\rho(1,z^2)dz\\
(G_A,G_D)&=\int_{-h/2}^{h/2}G(1,z^2)dz\\
E_D&=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E}{1-\nu^2}z^2dz
\end{aligned} \qquad (۸)$$

تعریف می‌شوند. برای استفاده از روش مودهای فرضی، جابه‌جایی های زاویه‌ای $\psi_x(x,y,t)$ و $\psi_y(x,y,t)$ و جابه‌جایی عرضی $w(x,y,t)$ به صورت:

$$\psi_x(x,y,t)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{\psi_x}(x,y)A_k^{\psi_x}(t) \qquad (۹)$$

$$\psi_y(x,y,t)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{\psi_y}(x,y)A_k^{\psi_y}(t) \qquad (۱۰)$$

$$w(x,y,t)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{w}(x,y)A_k^{w}(t) \qquad (۱۱)$$

بیان می‌شوند که در آن $\varphi_k^{\psi_x}(x,y)$، $\varphi_k^{\psi_y}(x,y)$ و $\varphi_k^w(x,y)$ به ترتیب k امین شکل مود متناظر با جابه‌جایی زاویه‌ای ψ_x و ψ_y و جابه‌جایی عرضی w هستند و $A_k^{\psi_x}(t)$، $A_k^{\psi_y}(t)$ و $A_k^w(t)$ ضرایب تأثیر متناظر با k امین تابع شکل مود مربوطه هستند که مختصات مودال نامیده می‌شوند. با استفاده از رابطه (۱۱)، جابه‌جایی و سرعت عرضی جرم M_1 چرخ جلو و عقب به صورت (۱۲) قابل بیان هستند:

$$\begin{aligned}
w_j(t)&=w_j\left(x_j,y_j,t\right)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^w\left(x_j,y_j\right)A_k^w(t),\\
\dot{w}_j(t)&=\dot{w}_j\left(x_j,y_j,t\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\varphi_{k,x}^w\left(x_j,y_j\right)\dot{x}_1+\varphi_{k,y}^w\left(x_j,y_j\right)\dot{y}_1\right)A_k^w(t)\\
&+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^w\left(x_j,y_j\right)\dot{A}_k^w(t),
\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

که در آن $j=1,2$ است. به دلیل غیرلزج فرض شدن سیال، از سوی سیال به ورق تنش برشی اعمال نمی‌شود و فشار دینامیکی سیال کاملاً بر سطح ورق عمود است. این فشار دینامیکی به عنوان تابعی از شتاب ورق در نظر گرفته شده و به صورت رابطه (۱۳) تعیین می‌شود [18]

$$p=m_f\frac{\partial^2w}{\partial t^2} \qquad (۱۳)$$

که در آن m_f جرم افزوده نامیده می‌شود و برای ورق شناور بر سطح آزاد شکل (۱) به صورت:

$$m_f=-\frac{\rho_f}{\mu}\left[\frac{e^{-2\mu h_f}+1}{e^{-2\mu h_f}-1}\right] \qquad (۱٤)$$

محا سبه می شود که در آن μ یک ثابت حقیقی ا ست که به صورت:

$$\mu=\pi\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}} \qquad (۱۵)$$

تعیین می شود. کار مجازی حا صل از نیروی فشار دینامیکی سیال و نیروی میرایی دمپر سیستم تعلیق هر دو چرخ به صورت:

$$\begin{aligned}
\delta w_{n.c.}&=\iint_A m_f\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\delta w dA\\
&+c(\dot{w}_A-\chi_2\dot{w}_2)(-\delta w_A+\chi_2\delta w_2)\\
&+c(\dot{w}_B-\chi_1\dot{w}_1)(-\delta w_B+\chi_1\delta w_1)
\end{aligned} \qquad (۱٦)$$

محاسبه می‌شود که درآن w_A و w_B جابه‌جایی عرضی دو انتهای جـسم صلب هـستند که به سیـستم تعلیق چرخ عقب و جلو متصل شده‌اند و به صورت (۱۷) به جابه‌جایی عرضی مرکز

جرم و زاویه چرخش جسم صلب مرتبط می‌شوند:

$$w_A=w_{M_2}-\frac{L_0}{2}\sin(\theta),\qquad w_B=w_{M_2}+\frac{L_0}{2}\sin(\theta)$$

(۱۷)

و δw_1 و δw_B جابه‌جایی مجازی دو انتهای دمپر چرخ جلو و δw_2 و δw_A جابه‌جایی مجازی دو انتهای دمپر چرخ عقب را نشان می‌دهند. از جایگذاری روابط (۱۱)، (۱۲) و (۱۷) در عبارت کار مجازی (۱٦)، نیروهای تعمیم‌یافته غیرکنسرواتیو به صورت (۱۸) حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}
Q_{n.c.A_j} &= \iint_A m_f\,\varphi_j^w(x,y)\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^w(x,y)\,\ddot{A}_k^w(t)\,Da\\
&+\chi_1 c\varphi_j(x_1,y_1)\times\Big[\dot{w}_{M2}+\frac{L_0}{2}\dot{\theta}\cos(\theta)\\
&-\Big(\sum_{k=1}^{n}\big(\varphi_{k,x}^w(x_1,y_1)\dot{x}_1+\varphi_{k,y}^w(x_1,y_1)\dot{y}_1\big)A_k^w(t)\\
&+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^w(x_1,y_1)\dot{A}_k^w(t)\Big)\Big]\\
&+\chi_2 c\varphi_j(x_2,y_2)\times\Big[\dot{w}_{M2}-\frac{L_0}{2}\dot{\theta}\cos(\theta)\\
&-\Big(\sum_{k=1}^{n}\big(\varphi_{k,x}^w(x_2,y_2)\dot{x}_2+\varphi_{k,y}^w(x_2,y_2)\dot{y}_2\big)A_k^w(t)\\
&+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^w(x_2,y_2)\dot{A}_k^w(t)\Big)\Big]\\
Q_{n.c.w_{M_2}} &= c\times\Big[-2\dot{w}_{M_2}+\chi_1\Big(\sum_{k=1}^{n}\big(\varphi_{k,x}^w(x_1,y_1)\dot{x}_1\\
&+\varphi_{k,y}^w(x_1,y_1)\dot{y}_1\big)A_k^w(t)+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^w(x_1,y_1)\dot{A}_k^w(t)\Big)\\
&+\chi_2\Big(\sum_{k=1}^{n}\big(\varphi_{k,x}^w(x_2,y_2)\dot{x}_2+\varphi_{k,y}^w(x_2,y_2)\dot{y}_2\big)A_k^w(t)\\
&+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^w(x_2,y_2)\dot{A}_k^w(t)\Big)\Big]\\
Q_{n.c.\theta} &= \frac{cL_0}{2}\times\Big[-L_0\dot{\theta}+\chi_1\Big(\sum_{k=1}^{n}\big(\varphi_{k,x}^w(x_1,y_1)\dot{x}_1\\
&+\varphi_{k,y}^w(x_1,y_1)\dot{y}_1\big)A_k^w(t)+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x_1,y_1)\dot{A}_k^w(t)\Big)\\
&-\chi_2\Big(\sum_{k=1}^{n}\big(\varphi_{k,x}^w(x_2,y_2)\dot{x}_2+\varphi_{k,y}^w(x_2,y_2)\dot{y}_2\big)A_k^w(t)\\
&+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^w(x_2,y_2)\dot{A}_k^w(t)\Big)\Big]
\end{aligned}$$

(۱۸)

با جایگذاری روابط (۹)، (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) در عبارات انرژی جنبشی و پتانسیل (۷) و تشکیل عبارت لاگرانژین سیستم $(L=KE-PE)$ و سپس جایگذاری عبارت لاگرانژین حاصل و نیروی تعمیم یافته (۱۸) در معادلات لاگرانژ:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_j^{\psi_x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial A_j^{\psi_x}}=0,\qquad j=1,\dots,n\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_j^{\psi_y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial A_j^{\psi_y}}=0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_j^{w}}\right)-\frac{\partial L}{\partial A_j^{w}}=Q_{n.c.A_j^w},\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_{M_2}}\right)-\frac{\partial L}{\partial w_{M_2}}=Q_{n.c.w_{M_2}},\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=Q_{n.c.\theta}
\end{aligned}$$

(۱۹)

و با فرض کوچک بودن زاویه θ، معادلات حاکم بر مختصات مودال و مختص w_{M_2} و θ به صورت (۲۰) به دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} T^{\psi_x} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & T^{\psi_y} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & T^{w} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & M_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{A}^{\psi_x}\\ \ddot{A}^{\psi_y}\\ \ddot{A}^{w}\\ \ddot{w}_{M_2}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Y_1 & Y_2 & Y_3\\ 0 & 0 & Y_2^T & 2c & 0\\ 0 & 0 & Y_3^T & 0 & \frac{cL_0^2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{A}^{\psi_x}\\ \dot{A}^{\psi_y}\\ \dot{A}^{w}\\ \dot{w}_{M_2}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 & 0 & 0\\ \Lambda_2^T & \Lambda_4 & \Lambda_5 & 0 & 0\\ \Lambda_3^T & \Lambda_5^T & \Lambda_6 & \Lambda_7 & \Lambda_8\\ 0 & 0 & K_{43} & 2k & 0\\ 0 & 0 & K_{53} & 0 & \frac{kL_0^2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^{\psi_x}\\ A^{\psi_y}\\ A^{w}\\ w_{M_2}\\ \theta\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}0 & 0 & \bar{f}(t) & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

(۲۰)

که در آن A^{ψ_x}، A^{ψ_y} و A^{w} بردار حاوی مختصات مودال هستند که به صورت:

$$A^{\psi_x}=\left[A_1^{\psi_x}(t),A_2^{\psi_x}(t),\dots,A_n^{\psi_x}(t)\right]^T$$
$$A^{\psi_y}=\left[A_1^{\psi_y}(t),A_2^{\psi_y}(t),\dots,A_n^{\psi_y}(t)\right]^T$$
$$A^{w}=\left[A_1^{w}(t),A_2^{w}(t),\dots,A_n^{w}(t)\right]^T$$

(۲۱)

مشخص شده و درایه‌های ضرایب ماتریسی به صورت روابط (۲۲) تا (۲۵) تعیین می‌شوند:

$$T_{jk}^{\psi_x}=\iint_A I_D\varphi_j^{\psi_x}(x,y)\varphi_k^{\psi_x}(x,y)dA$$
$$T_{jk}^{\psi_y}=\iint_A I_D\varphi_j^{\psi_y}(x,y)\varphi_k^{\psi_y}(x,y)dA$$
$$T_{jk}^{w}=\iint_A (I_A+m_f)\varphi_j^{w}(x,y)\varphi_k^{w}(x,y)dA$$
$$+M_1\big(\chi_1\varphi_j^{w}(x_1,y_1)\varphi_k^{w}(x_1,y_1)$$
$$+\chi_2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\varphi_k^{w}(x_2,y_2)\big)$$

(۲۲)

$$Y_{1jk}=2M_1\times\big[\chi_1\big(\dot{x}_1\varphi_j^{w}(x_1,y_1)\varphi_{k,x}^{w}(x_1,y_1)$$
$$+\dot{y}_1\varphi_j^{w}(x_1,y_1)\varphi_{k,y}^{w}(x_1,y_1)\big)$$
$$+\chi_2\big(\dot{x}_2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\varphi_{k,x}^{w}(x_2,y_2)$$
$$+\dot{y}_2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\varphi_{k,y}^{w}(x_2,y_2)\big)\big]$$
$$+c\times\big[\chi_1\varphi_j^{w}(x_1,y_1)\varphi_k^{w}(x_1,y_1)$$
$$+\chi_2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\varphi_k^{w}(x_2,y_2)\big]$$
$$Y_{2j}=-c\big(\chi_1\varphi_j^{w}(x_1,y_1)+\chi_2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\big)$$
$$Y_{3j}=\frac{cL_0}{2}\big(-\chi_1\varphi_j^{w}(x_1,y_1)+\chi_2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\big)$$

(۲۳)

$$\Lambda_{1jk}=\iint_A\left[E_D\left(\varphi_{j,x}^{\psi_x}\varphi_{k,x}^{\psi_x}\right)+G_D\left(\varphi_{j,y}^{\psi_x}\varphi_{k,y}^{\psi_x}\right)\right.$$
$$\left.+k_sG_A\left(\varphi_j^{\psi_x}\varphi_k^{\psi_x}\right)\right]dA$$
$$\Lambda_{2jk}=\iint_A\left[\nu E_D\left(\varphi_{j,x}^{\psi_x}\varphi_{k,y}^{\psi_y}\right)+G_D\left(\varphi_{j,y}^{\psi_x}\varphi_{k,x}^{\psi_y}\right)\right]dA$$
$$\Lambda_{3jk}=-\iint_A k_sG_A\left(\varphi_j^{\psi_x}\varphi_{k,x}^{w}\right)dA$$
$$\Lambda_{4jk}=\iint_A\left[E_D\left(\varphi_{j,y}^{\psi_y}\varphi_{k,y}^{\psi_y}\right)+G_D\left(\varphi_{j,x}^{\psi_y}\varphi_{k,x}^{\psi_y}\right)\right.$$
$$\left.+k_sG_A\left(\varphi_j^{\psi_y}\varphi_k^{\psi_y}\right)\right]dA$$
$$\Lambda_{5jk}=-\iint_A k_sG_A\left(\varphi_j^{\psi_y}\varphi_{k,y}^{w}\right)dA$$
$$\Lambda_{6jk}=\iint_A k_sG_A\left(\varphi_{j,x}^{w}\varphi_{k,x}^{w}+\varphi_{j,y}^{w}\varphi_{k,y}^{w}\right)dA$$
$$+M_1\big[\chi_1\big(\dot{x}_1^2\varphi_j^{w}(x_1,y_1)\varphi_{k,xx}^{w}(x_1,y_1)$$
$$+2\dot{x}_1\dot{y}_1\varphi_j^{w}(x_1,y_1)\varphi_{k,xy}^{w}(x_1,y_1)$$
$$+\dot{y}_1^2\varphi_j^{w}(x_1,y_1)\varphi_{k,yy}^{w}(x_1,y_1)\big)$$
$$+\chi_2\big(\dot{x}_2^2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\varphi_{k,xx}^{w}(x_2,y_2)$$
$$+2\dot{x}_2\dot{y}_2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\varphi_{k,xy}^{w}(x_2,y_2)$$
$$+\dot{y}_2^2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\varphi_{k,yy}^{w}(x_2,y_2)\big)\big]$$
$$+c\big[\chi_1\big(\dot{x}_1\varphi_j^{w}(x_1,y_1)\varphi_{k,x}^{w}(x_1,y_1)$$
$$+\dot{y}_1\varphi_j^{w}(x_1,y_1)\varphi_{k,y}^{w}(x_1,y_1)\big)$$
$$+\chi_2\big(\dot{x}_2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\varphi_{k,x}^{w}(x_2,y_2)$$
$$+\dot{y}_2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\varphi_{k,y}^{w}(x_2,y_2)\big)\big]$$
$$+k\big[\chi_1\varphi_j^{w}(x_1,y_1)\varphi_k(x_1,y_1)+\chi_2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\varphi_k(x_2,y_2)\big]$$
$$\Lambda_{7j}=-k\big(\chi_1\varphi_j^{w}(x_1,y_1)+\chi_2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\big)$$
$$\Lambda_{8j}=\frac{kL_0}{2}\big(-\chi_1\varphi_j^{w}(x_1,y_1)+\chi_2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\big)$$
$$K_{43}=\Lambda_7^T(t)-c\Big[\chi_1\Big(\dot{x}_1\Phi_{,x}^{w\,T}(x_1,y_1)+\dot{y}_1\Phi_{,y}^{w\,T}(x_1,y_1)\Big)$$
$$+\chi_2\Big(\dot{x}_2\Phi_{,x}^{w\,T}(x_2,y_2)+\dot{y}_2\Phi_{,y}^{w\,T}(x_2,y_2)\Big)\Big]$$
$$K_{53}=\Lambda_8^T(t)+\frac{cL_0}{2}\Big[-\chi_1\Big(\dot{x}_1\Phi_{,x}^{w\,T}(x_1,y_1)$$
$$+\dot{y}_1\Phi_{,y}^{w\,T}(x_1,y_1)\Big)+\chi_2\Big(\dot{x}_2\Phi_{,x}^{w\,T}(x_2,y_2)$$
$$+\dot{y}_2\Phi_{,y}^{w\,T}(x_2,y_2)\Big)\Big]$$

(۲٤)

$$\bar{f}_j=\left(M_1+\frac{M_2}{2}\right)g\times\left(\chi_1\varphi_j^{w}(x_1,y_1)+\chi_2\varphi_j^{w}(x_2,y_2)\right)\quad(۲۵)$$

که در آن $j=1,\dots,n$ و $k=1,\dots,n$ و n تعداد مختصات مودال درنظرگرفته شده است و $\Phi_{,x}^{w}$ و $\Phi_{,y}^{w}$ به صورت:

$$\Phi_{,x}^{w}(x_i,y_i)=\left[\varphi_{1,x}^{w}(x_i,y_i),\dots,\varphi_{n,x}^{w}(x_i,y_i)\right]^T$$
$$\Phi_{,y}^{w}(x_i,y_i)=\left[\varphi_{1,y}^{w}(x_i,y_i),\dots,\varphi_{n,y}^{w}(x_i,y_i)\right]^T$$

(۲٦)

تعریف می‌شوند که در آن $(i=1,2)$ است. برای ورق با شرایط مرزی منتخب، توابع مثلثاتی که شرایط مرزی را ارضا می‌کنند به عنوان توابع شکل در نظر گرفته می‌شوند.

بر این اساس، برای ورق با هر چهار لبه تکیه‌گاه ساده (SSSS) توابع شکل:

$$\varphi_i^{w}(x,y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$
$$\varphi_i^{\psi_x}(x,y)=\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\varphi_i^{\psi_y}(x,y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

(۲۷)

و با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌های $x=0$ و $x=a$ و لبه‌های آزاد در $y=0$ و $y=b$ (SFSF) توابع شکل:

$$\varphi_i^{w}(x,y)=\sin\frac{m\pi x}{a}$$
$$\varphi_i^{\psi_x}(x,y)=\cos\frac{m\pi x}{a}$$
$$\varphi_i^{\psi_y}(x,y)=\sin\frac{m\pi x}{a}$$

(۲۸)

و با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌های $x=0$ و $x=a$ و لبه‌های گیردار در $y=0$ و $y=b$ (CFCF) توابع شکل:

$$\varphi_i^{w}(x,y)=\cos\frac{2m\pi x}{a}-1$$
$$\varphi_i^{\psi_x}(x,y)=\sin\frac{m\pi x}{a}$$
$$\varphi_i^{\psi_y}(x,y)=\sin\frac{m\pi x}{a}$$

(۲۹)

درنظرگرفته می‌شوند که در آنها m و n به ترتیب مودهای ارتعاشی در راستای طولی و عرضی ورق هستند. در صورت در نظر گرفتن اولین شکل مود و حرکت با سرعت ثابت V جسم صلب نو سان کننده از روی خط میانی و موازی با امتداد طولی ورق:

$$x_1(t)=\chi_1(Vt),\ y_1(t)=\chi_1\frac{b}{2}$$
$$x_2(t)=\chi_2(Vt-\frac{L_0}{2}),\ y_2(t)=\chi_2\frac{b}{2}$$

(۳۰)

و در نظر گرفتن ورود یک جسم صلب نوسان‌کننده متحرک بر روی ورق بلافاصله پس از خروج جسم صلب قبلی، به وسیله جایگذاری شکل مود ورق متناظر با شرایط مرزی منتخب از یکی از مجموعه توابع شکل (۲۷) تا (۲۹) در روابط (۲۲) تا (۲۵)، معادله پنج درجه آزادی حرکت سیستم پیوسته ورق-جسم صلب متحرک به صورت (۳۱) حاصل می‌شود:

$$m(t)\ddot{\eta}+c(t)\dot{\eta}+k(t)\eta=f(t) \qquad (۳۱)$$

که در آن $\eta=\left[A_1^{\psi_x},A_1^{\psi_y},A_1^{w},w_{M_2},\theta\right]^T$ و ضرایب ماتریسی توابعی متناوب با دوره تکرار بار $T_p=(a+L_0)/V$ هستند که در بازه زمانی $0\le t\le T_p$ به صورت روابط (۳۲) تا (۳۵) تعیین می‌شوند:

$$m(t)=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & m_{33} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$m_{11}=\bar{K}_1 I_D ab,$$
$$m_{22}=\bar{K}_2 I_D ab,$$
$$m_{33}=\bar{K}_3(1+\bar{m}_f)+0.5r\alpha Q_1(t)$$

(۳۲)

$$c(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ 0 & 0 & c_{21} & 2\xi\Omega_0 & 0\\ 0 & 0 & c_{31} & 0 & 6\xi\Omega_0\end{bmatrix}$$
$$c_{11}=0.5r\alpha\bar{\Omega}Q_2(t)+\xi\Omega_0\alpha(1-r)Q_1(t),$$
$$c_{12}=-\xi\Omega_0\alpha(1-r)Q_3(t),$$
$$c_{13}=0.5L_0\xi\Omega_0\alpha(1-r)Q_4(t),$$
$$c_{21}=-\xi\Omega_0 Q_3(t),$$
$$c_{31}=\frac{6\xi\Omega_0}{L_0}Q_4(t)$$

(۳۳)

$$k(t)=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0\\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & 0 & 0\\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35}\\ 0 & 0 & k_{43} & \Omega_0^2 & 0\\ 0 & 0 & k_{53} & 0 & 3\Omega_0^2\end{bmatrix}$$
$$k_{11}=\pi^2\left(\bar{K}_4E_D\frac{b}{a}+\bar{K}_5G_D\frac{a}{b}\right)+k_s ab\bar{K}_1G_A,$$
$$k_{12}=\pi^2(\bar{K}_6\nu E_D+\bar{K}_7G_D),$$
$$k_{13}=-\pi bk_s\bar{K}_8G_A,$$
$$k_{21}=k_{12},$$
$$k_{22}=\pi^2\left(\bar{K}_9E_D\frac{a}{b}+\bar{K}_{10}G_D\frac{b}{a}\right)+k_s ab\bar{K}_2G_A,$$
$$k_{23}=-\pi ak_s\bar{K}_{11}G_A,$$
$$k_{31}=\frac{-\pi k_s\bar{K}_8G_A}{I_A a},$$
$$k_{32}=\frac{-\pi k_s\bar{K}_{11}G_A}{I_A b},$$
$$k_{33}=\frac{\pi^2k_sG_A}{I_A ab}\left(\bar{K}_{12}\frac{b}{a}+\bar{K}_{13}\frac{a}{b}\right)$$
$$-0.5r\alpha\bar{\Omega}^2Q_5(t)+0.5(1-r)\alpha\Omega_0^2Q_1(t)$$
$$+0.5(1-r)\alpha\bar{\Omega}\xi\Omega_0Q_2(t),$$

$$k_{34} = -0.5(1-r)\alpha\Omega_0^2 Q_3(t),$$
$$k_{35} = 0.25L_0(1-r)\alpha\Omega_0^2 Q_4(t),$$
$$k_{43} = -0.5\Omega_0^2 Q_3(t) - \bar{\Omega}\xi\Omega_0 Q_6(t),$$
$$k_{53} = \frac{1}{L_0}\left(3\Omega_0^3 Q_4(t) + 6\bar{\Omega}\xi\Omega_0 Q_7(t)\right)$$

(۳٤)

$$f(t) = [000.5\alpha g Q_3(t)00]^T \quad (۳۵)$$

و برای بازه زمانی $t > T_p$

$$m(t)=m(t-T_p),\ c(t)=c(t-T_p)$$
$$k(t)=k(t-T_p),\ f(t)=f(t-T_p)$$

(۳٦)

است و

$$\Omega=\pi^2 h\sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \quad (۳۷)$$

و سایر پارامترها به صورت رابطه (۳۸) تعریف می‌شوند:

$$\alpha=\frac{2M_1+M_2}{I_A ab},\quad \gamma=\frac{\pi V}{a\Omega},\ \bar{\Omega}=\gamma\Omega,$$
$$r=\frac{2M_1}{2M_1+M_2},\quad \Omega_0=\sqrt{\frac{2K}{M_2}},$$
$$\xi=\frac{2c}{2\Omega_0 M_2},\quad \bar{m}_f=\frac{m_f}{I_A}$$

(۳۸)

که در آن $\bar{m}_f$ پارامتر بدون بعد جرم افزوده نامیده می‌شود و ثابت‌های $\bar{K}_1$ تا $\bar{K}_{13}$ و توابع $Q_1(t)$ تا $Q_7(t)$ به شرایط مرزی ورق بستگی دارند که برای شرایط مرزی (SSSS)، (SFSF) و (CFCF) به ترتیب از طریق روابط (۳۹)، (٤۰) و (٤۱) قابل تعیین هستند:

$$\bar{K}_1=\ldots=\bar{K}_{13}=0.25$$
$$Q_1(t)=\chi_1\sin^2(\tau)+\chi_2\sin^2(\tau-\bar{L}),$$
$$Q_2(t)=\chi_1\sin(2\tau)+\chi_2\sin2(\tau-\bar{L}),$$
$$Q_3(t)=\chi_1\sin(\tau)+\chi_2\sin(\tau-\bar{L}),$$
$$Q_4(t)=\chi_2\sin(\tau-\bar{L})-\chi_1\sin(\tau),$$
$$Q_5(t)=Q_1(t),$$
$$Q_6(t)=\chi_1\cos(\tau)+\chi_2\cos(\tau-\bar{L}),$$
$$Q_7(t)=\chi_2\cos(\tau-\bar{L})-\chi_1\cos(\tau)$$

(۳۹)

$$\bar{K}_1=\bar{K}_2=\bar{K}_3=\bar{K}_4=\bar{K}_8=\bar{K}_{10}=\bar{K}_{12}=0.5,$$
$$\bar{K}_5=\bar{K}_6=\bar{K}_7=\bar{K}_9=\bar{K}_{11}=\bar{K}_{13}=0$$
$$Q_1(t)=\chi_1\sin^2(\tau)+\chi_2\sin^2(\tau-\bar{L}),$$
$$Q_2(t)=\chi_1\sin(2\tau)+\chi_2\sin2(\tau-\bar{L}),$$
$$Q_3(t)=\chi_1\sin(\tau)+\chi_2\sin(\tau-\bar{L}),$$
$$Q_4(t)=\chi_2\sin(\tau-\bar{L})-\chi_1\sin(\tau),$$
$$Q_5(t)=Q_1(t),$$
$$Q_6(t)=\chi_1\cos(\tau)+\chi_2\cos(\tau-\bar{L}),$$
$$Q_7(t)=\chi_2\cos(\tau-\bar{L})-\chi_1\cos(\tau)$$

(٤۰)

$$\bar{K}_1=\bar{K}_2=\bar{K}_4=\bar{K}_{10}=0.5,$$
$$\bar{K}_5=\bar{K}_6=\bar{K}_7=\bar{K}_8=\bar{K}_9=\bar{K}_{11}=\bar{K}_{13}=0,$$
$$\bar{K}_3=1.5,\bar{K}_{12}=2$$
$$Q_1(t)=\chi_1(\cos(2\tau)-1)^2+\chi_2(\cos2(\tau-\bar{L})-1)^2,$$
$$Q_2(t)=-4(\chi_1(\cos(2\tau)-1)\sin(2\tau)$$
$$+\chi_2(\cos2(\tau-\bar{L})-1)\sin2(\tau-\bar{L})),$$
$$Q_3(t)=\chi_1(\cos(2\tau)-1)+\chi_2(\cos2(\tau-\bar{L})-1),$$
$$Q_4(t)=-\chi_1(\cos(2\tau)-1)+\chi_2(\cos2(\tau-\bar{L})-1),$$
$$Q_5(t)=4(\chi_1(\cos(2\tau)-1)\cos(2\tau)$$
$$+\chi_2(\cos2(\tau-\bar{L})-1)\cos2(\tau-\bar{L})),$$
$$Q_6(t)=-2\left(\chi_1\sin(2\tau)+\chi_2\sin2(\tau-\bar{L})\right),$$
$$Q_7(t)=2(\chi_1\sin(2\tau)-\chi_2\sin2(\tau-\bar{L}))$$

(٤۱)

که در این روابط

$$\tau=\bar{\Omega}t,\bar{L}=\frac{\pi L_0}{a} \quad (٤۲)$$

است.

معادلات دیفرانسیل حاکم بر دینامیک سیستم ورق-جسم نقطه‌ای متحرک

به منظور استفاده از روش مودهای فرضی برای استخراج معادله حاکم بر دینامیک مسئله، ابتدا عبارت انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم ورق – جرم نقطه‌ای متحرک به صورت (٤۳) نوشته می‌شود:

$$KE=\frac{1}{2}\iint_A\left[\int_{-h/2}^{h/2}\rho(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2)dz\right]dA$$
$$+\frac{1}{2}M\left(\dot{x}_M^2+\dot{y}_M^2+\dot{w}^2{}_M\right)$$

$$PE=\frac{1}{2}\iint_A\left[\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}+2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy}+2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz}+2\sigma_{yz}\varepsilon_{yz})dz\right]dA-Mgw_M$$

(۴۳)

جایگذاری روابط (۱) تا (۳) در روابط (۴۳) منجر به رابطه (۴۴) می‌شود:

$$KE=\frac{1}{2}\iint_A\left[I_D\left(\dot{\psi}_x^2+\dot{\psi}_y^2\right)+I_A\dot{w}^2\right]dA+\frac{1}{2}M\left(\dot{x}_M^2+\dot{y}_M^2+\dot{w}^2{}_M\right)$$

$$PE=\frac{1}{2}\iint_A\Big[E_D\left(\psi_{x,x}^2+\psi_{y,y}^2+2\nu\psi_{x,x}\psi_{y,y}\right)+G_D\left(\psi_{x,y}^2+\psi_{y,x}^2+2\psi_{x,y}\psi_{y,x}\right)+k_sG_A\left(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_{z,x}^2+\psi_{z,y}^2-2\psi_x\psi_{z,x}-2\psi_y\psi_{z,y}\right)\Big]dA-Mgw_M$$

(۴۴)

با استفاده از رابطه (۱۳)، کار مجازی حاصل از نیروی فشار دینامیکی سیال به صورت (۴۵) تعیین می‌شود:

$$\delta w_{n.c.}=\iint_A m_f\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w dA \quad (۴۵)$$

با جایگذاری روابط (۹)، (۱۰) و (۱۱) در عبارات انرژی جنبشی و پتانسیل (۴۴) و عبارت کار مجازی (۴۵) و تشکیل لاگرانژین سیستم $(L=KE-PE)$ و تعیین مؤلفه نیروی تعمیم یافته غیرکنسرواتیو:

$$Q_{n.c.A_j}=\iint_A m_f\varphi_j^w(x,y)\sum_{k=1}^n\varphi_k^w(x,y)\ddot{A}_k^w(t)dA \quad (۴۶)$$

و جایگذاری عبارت لاگرانژین و نیروی تعمیم یافته (۴۶) در معادلات لاگرانژ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{A}_j^{\psi_x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial A_j^{\psi_x}}=0,j=1,\dots,n$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{A}_j^{\psi_y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial A_j^{\psi_y}}=0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{A}_j^{w}}\right)-\frac{\partial L}{\partial A_j^{w}}=Q_{n.c.A_j^w}$$

(۴۷)

و با درنظرگرفتن اولین شکل مود ورق با تکیه‌گاه ساده، برای وقتی که جرم نقطه‌ای متحرک از روی خط میانی و موازی با امتداد طولی ورق با سرعت ثابت V عبور می‌کند $(x_M(t)=Vt,y_M(t)=\frac{b}{2})$ و بلافاصله پس از خروج جسم متحرک از روی ورق، جسم متحرک دیگری با همان مشخصات بر روی ورق وارد می شود، پس از انجام عملیات ریاضی لازم، معادله سیستم سه درجه آزادی که حرکت سیستم پیوسته ورق-جرم متحرک را توصیف می‌کند، به صورت (۴۸) حاصل می‌شود:

$$m(t)\ddot{\eta}+c(t)\dot{\eta}+k(t)\eta=f(t) \quad (۴۸)$$

که در آن $\eta=\left[A_1^{\psi_x},A_1^{\psi_y},A_1^w\right]^T$ و ضرایب ماتریسی توابعی متناوب با دوره تکرار بار $(T_p=a/V)$ هستند که در بازه زمانی $0\le t\le T_p$ به صورت روابط (۴۹) تا (۵۳) تعیین می‌شوند:

$$m(t)=\begin{bmatrix}m_{11}&0&0\\0&m_{22}&0\\0&0&m_{33}\end{bmatrix}$$
$$m_{11}=I_Dab,$$
$$m_{22}=I_Dab,$$
$$m_{33}=(1+\bar{m}_f)+4\alpha\sin^2(\tau)$$

(۴۹)

$$c(t)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&c_{33}\end{bmatrix}$$
$$c_{33}=4\alpha\bar{\Omega}\sin 2\tau$$

(۵۰)

$$k(t)=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{bmatrix}$$

$$k_{11}=\pi^2\left(E_D\frac{b}{a}+G_D\frac{a}{b}\right)+k_sabG_A,$$
$$k_{12}=\pi^2(\nu E_D+G_D),$$
$$k_{13}=-\pi bk_sG_A,$$
$$k_{21}=k_{12},$$
$$k_{22}=\pi^2\left(E_D\frac{a}{b}+G_D\frac{b}{a}\right)+k_sabG_A,$$
$$k_{23}=-\pi ak_sG_A,$$

(۵۱)

$$k_{31}=\frac{-\pi k_sG_A}{I_Aa},$$
$$k_{32}=\frac{-\pi k_sG_A}{I_Ab},$$
$$k_{33}=\frac{\pi^2k_sG_A}{I_Aab}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)-4\alpha\bar{\Omega}^2\sin^2(\tau)$$
$$f(t)=[0\quad 0\quad 4\alpha g\sin(\tau)]^T$$

(۵۲)

و برای بازه زمانی $t>T_p$

$$m(t)=m(t-T_p), c(t)=c(t-T_p)$$
$$k(t)=k(t-T_p), f(t)=f(t-T_p)$$

(۵۳)

است که در این روابط پارامتر α به صورت

$$\alpha=\frac{M}{I_A ab} \quad (۵۴)$$

تعریف می‌شود.

تئوری فلاکه در آنالیز پایداری

برای دو مدل در نظر گرفته شده برای جسم متحرک در شکل (۲) و (۳)، از معادلات حاکم بر دینامیک سیستم ورق- جسم متحرک، شامل روابط (۳۱) تا (۳۶) و روابط (۴۸) تا (۵۳)، ملاحظه می‌شود که سیستم مذکور یک سیستم متغیر با زمان خطی با ضرایب متناوب است که در هر دو مدل، معادلات حاکم می‌توانند به شکل فضای حالت زیر نوشته شوند:

$$\begin{cases}\dot{q}=R(t)q+P(t)\\ R(t+T_p)=R(t),\ \ P(t+T_p)=P(t)\end{cases}$$

(۵۵)

تئوری فلاکه، روشی است که امکان آنالیز پایداری سیستم‌های خطی همگن با ضرایب متناوب را فراهم می‌کند [35]. بر اساس این روش، با کنار گذاشتن بخش $P(t)$ در معادله فضا- حالت (۵۵) و در نظر گرفتن این معادله به فرم

$$\begin{cases}\dot{q}=R(t)q\\ R(t+T_p)=R(t)\end{cases}$$

(۵۶)

امکان مطالعه پایداری پارامتریک سیستم ورق – جرم متحرک فراهم می‌شود. با توجه به اینکه ابعاد و درایه‌های ماتریس $R(t)$ به شیوه مدل‌سازی و مقادیر پارامترهای مدل بستگی دارد، این انتظار وجود دارد که با استفاده از روش تئوری فلاکه بتوان اثر شیوه مدل‌سازی و پارامترهای مدل را بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم ورق- جسم متحرک بررسی کرد.

در روش تئوری فلاکه پایداری تمام حل‌های معادلات دیفرانسیل معمولی و خطی با ضرایب متناوب به فرم (۵۶) مشخص می‌شوند. برای تبیین این تئوری، حل معادله (۵۶) برای شرایط اولیه $q_0=q(0)$ در حالت کلی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$q(t)=\phi_0(t)q_0 \quad (۵۷)$$

در واقع $\phi_0(t)$ یک ماتریس پایه است که ستون‌های آن از حل‌های مستقل خطی معادله همگن (۵۶) تشکیل شده‌اند. با تعریف ماتریس C به صورت:

$$C=\phi_0(T_p) \quad (۵۸)$$

می‌توان ملاحظه کرد که با انتگرال‌گیری عددی از رابطه (۵۶) در بازه زمانی یک دوره تناوب، می‌توان از (۵۸) ماتریس C را به دست آورد. تئوری فلاکه بیان می‌کند که اگر تمامی مقادیر ویژه ماتریس C در داخل یک دایره واحد به مرکز $(0,0)$ در صفحه مختلط باشند، سیستم پایدار است و اگر حداقل یکی از مقادیر ویژه در خارج از دایره مذکور قرار گرفته باشد، سیستم ناپایدار خواهد بود.

نتایج آنالیز پایداری

در این بخش یک ورق مستطیلی شناور بر روی سیال با تکیه‌گاه ساده به طول ۵m، عرض ۱m، ضخامت ۰/۱m، مدول یانگ ۲۰۰Gpa، ضریب پواسون ۰/۳ و جرم واحد حجم ۷۸۵۰ kg/m^3 تحت عبور پی‌درپی جسم‌های متحرک در نظر گرفته شده است به این ترتیب که فرض شده بلافاصله پس از خروج یک جسم متحرک از روی ورق، جسم متحرک دیگری با همان مشخصات جسم قبلی بر روی ورق وارد می‌شود.

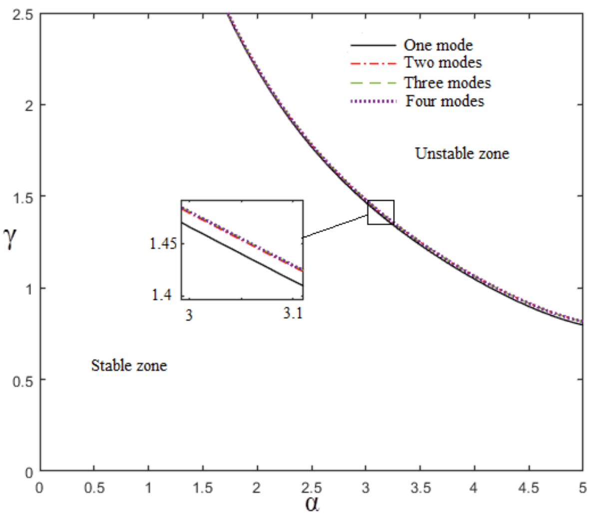
با استفاده از روش تئوری فلاکه، نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم ورق- جسم متحرک برای دو مدل جرم نقطه‌ای متحرک و جسم صلب نوسان کننده متحرک از طریق مشخص کردن نواحی پایدار و ناپایدار در صفحه پارامترهای بی‌بعد (α,γ) ارائه شده و اثر شیوه مدل‌سازی جسم متحرک و پارامترهای مدل بر روی نتایج آنالیز پایداری مورد مطالعه قرار گرفته است.

بر این اساس، برنامه‌ای در محیط نرم‌افزار متلب (Matlab) نوشته شده است که به ازای مقادیر منتخب از پارامترهای مسئله، ماتریس پایه C را تشکیل داده و مقادیر ویژه این ماتریس را محاسبه می‌کند. سپس با استفاده از مقادیر ویژه حاصل شده، مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار توسط کانتور $(\|\lambda_C\| = 1)$ تشخیص داده می‌شود. با اجرای این برنامه، نواحی پایدار و ناپایدار در بازه $0 < \alpha \le 5$ و $0 < \gamma \le 2.5$ از صفحه پارامترهای (α,γ) تعیین

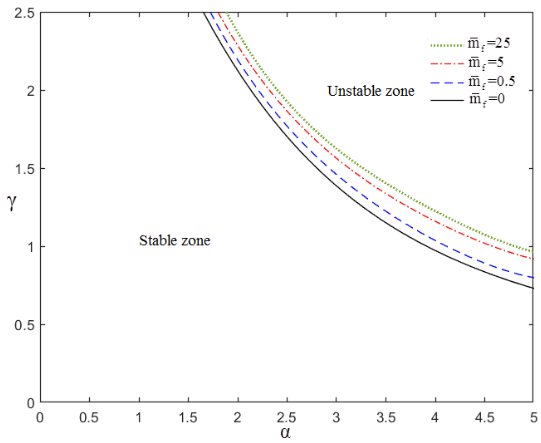
شده‌اند.

ابتدا برای بررسی اثر تعداد شکل مودها بر روی نتایج آنالیز پایداری، چهار شکل شامل مود اول، دوم، سوم و چهارم از مجموعه توابع شکل (۲۷) به ترتیب متناظر با $(m=1, n=1)$، $(m=1, n=2)$، $(m=2, n=1)$ و $(m=2, n=2)$ در نظر گرفته شده و در چهار مرحله به ترتیب با لحاظ یک شکل مود شامل فقط شکل مود اول، دو شکل مود شامل مودهای اول و دوم، سه شکل مود شامل مودهای اول، دوم و سوم و نهایتاً چهار شکل مود شامل مودهای اول، دوم، سوم و چهارم، آنالیز پایداری دینامیکی سیستم انجام و مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار در صفحه پارامترها تعیین و در شکل (٤) با هم مقایسه شده‌اند. این مقایسه نشان می‌دهد که مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار حاصل از در نظر گرفتن تعداد شکل مودهای متفاوت بسیار به هم نزدیک هستند. بر این اساس در ادامه روند بررسی آنالیز پایداری دینامیکی سیستم، فقط با درنظرگرفتن شکل مود متناظر با $(m=1, n=1)$ نسبت به انجام آنالیز پایداری دینامیکی اقدام و نتایج به دست آمده‌اند.

شکل (٥) اثر مقدار پارامتر بدون بعد جرم افزوده $\bar{m}_f$ را بر روی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار نشان می‌دهد. همان گونه که ملاحظه می‌شود نسبت به حالتی که ورق با سیال در تماس نیست ($\bar{m}_f = 0$)، تماس سیال با سطح تحتانی ورق ناحیه ناپایدار سیستم را کاهش داده و با افزایش مقدار $\bar{m}_f$ پایداری سیستم تقویت می‌شود.



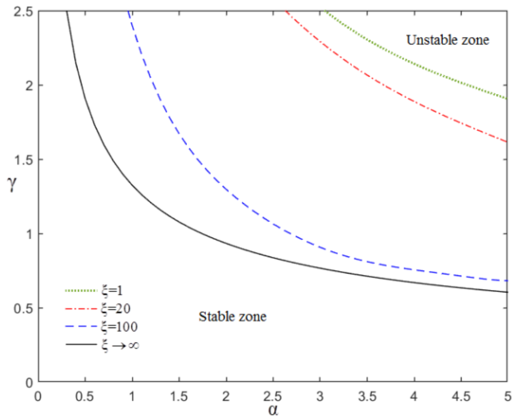
شکل ٤ اثر تعداد شکل مودها بر روی مرز بین ناحیه پایدار و ناپایدار پایداری ورق مستطیلی در تماس با سیال تحت اثر جسم صلب نوسان‌کننده متحرک $(r = 0.05, \xi = 1, \Omega_0 = 100, L_0 = 1m, \bar{m}_f = 1)$



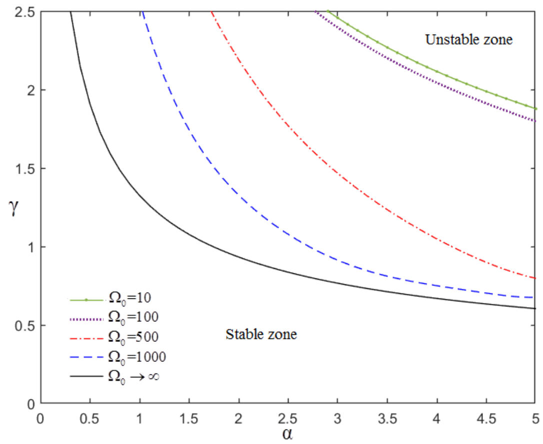
شکل ٥ اثر تغییر پارامتر بدون بعد جرم افزوده $\bar{m}_f$ بر روی نقشه پایداری دینامیکی پایداری ورق مستطیلی در تماس با سیال تحت اثر جسم صلب نوسان‌کننده متحرک $(r = 0.05, \xi = 1, \Omega_0 = 500, L_0 = 1m)$

به منظور مطالعه اثر مقادیر پارامترهای جسم صلب نوسان‌کننده متحرک بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی، در این بخش اثر مقادیر پارامترهای ξ، Ω_0، r و L_0 بر روی نتایج آنالیز بررسی شده است. نتایج در چهار مرحله، هر نوبت با ثابت در نظر گرفتن سه پارامتر از پارامترهای ξ، Ω_0، r و L_0 و تغییر یکی از آنها، در صفحه $\gamma-\alpha$ ارائه شده‌اند. اثر تغییر مقادیر پارامترهای ξ، Ω_0، r و L_0 بر روی نقشه پایداری به ترتیب در شکل (٦)، (٧)، (٨) و (٩) نشان داده شده است.

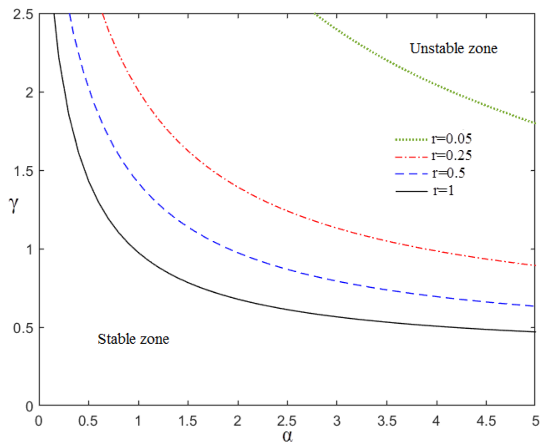
شکل (٦) و شکل (٧) نشان می‌دهند که افزایش مقدار ξ و Ω_0 سبب افزایش ناحیه ناپایدار در صفحه $\gamma-\alpha$ می‌شود و همچنین ملاحظه می‌شود که با افزایش هر یک از مقادیر ξ یا Ω_0، منحنی مرز پایداری دینامیکی ورق تحت اثر جسم صلب نوسان کننده متحرک به منحنی مرز پایداری دینامیکی ورق تحت اثر دو جرم نقطه‌ای متحرک متصل با یک میله صلب و با دوره تناوب عبور از روی ورق $T_p=(a+L_0)/V$ میل می‌کند. این نتیجه مبین این واقعیت فیزیکی است که در نتیجه افزایش بسیار مقادیر ξ یا Ω_0، در شکل (۲) اتصال دو چرخ به شاسی جسم متحرک، به اتصال صلب نزدیک شده و جسم متحرک نوسان کننده به دو جرم نقطه‌ای متحرک متصل با یک میله صلب تبدیل می‌شود.



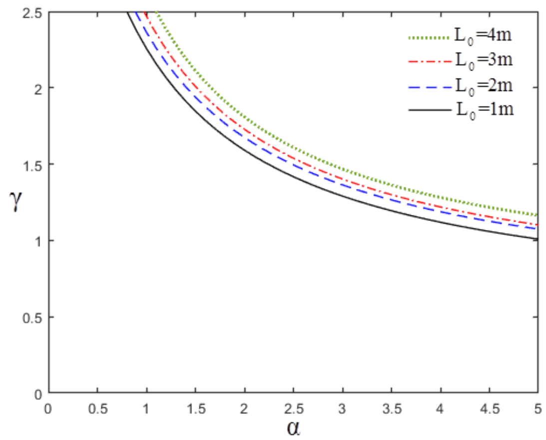
شکل ٦ اثر تغییر نسبت میرایی ξ بر روی نقشه پایداری دینامیکی ورق مستطیلی در تماس با سیال تحت اثر جسم صلب نوسان‌کننده متحرک
$(r = 0.05, \Omega_0 = 10, L_0 = 1m, \bar{m}_f = 1)$



شکل ۷ اثر تغییر فرکانس Ω_0 بر روی نقشه پایداری دینامیکی ورق مستطیلی در تماس با سیال تحت اثر جسم صلب نوسان‌کننده متحرک
$(r = 0.05, \xi = 1, L_0 = 1m, \bar{m}_f = 1)$



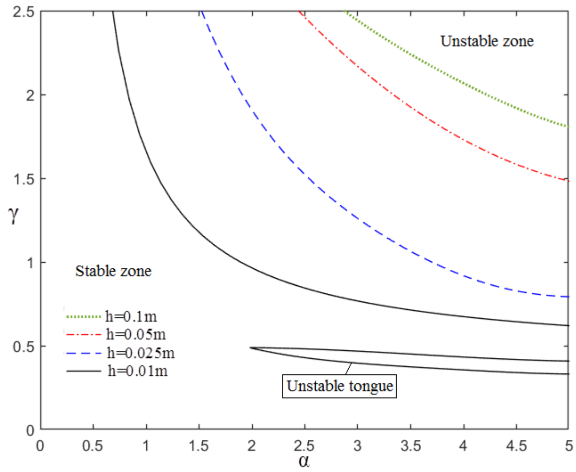
شکل ۸ اثر نسبت جرمی r بر روی نقشه پایداری دینامیکی ورق مستطیلی در تماس با سیال تحت اثر جسم صلب نوسان‌کننده متحرک
$(\Omega_0 = 100, \xi = 1, L_0 = 1m, \bar{m}_f = 1)$



شکل ۹ اثر طول جسم صلب L_0 بر روی نقشه پایداری دینامیکی ورق در تماس با سیال تحت اثر جسم صلب نوسان‌کننده متحرک
$(r = 0.2, \xi = 1, \Omega_0 = 20, \bar{m}_f = 1)$

در شکل (۸)، اثر تغییر نسبت جرم r بر روی نقشه پایداری بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش نسبت جرم چرخ M_1 به جرم کل جسم متحرک، ناحیه ناپایدار افزایش می‌یابد. منحنی $r=1$ مبین حالتی است که مجموع جرم دو چرخ با جرم کل جسم متحرک برابر می‌شود و یا به عبارت دیگر جرم شاسی M_2 صفر شده و جسم صلب نوسان کننده متحرک به دو جرم نقطه‌ای به فا صله L_0 از هم تبدیل می شود. مقایسه منحنی $r=1$ با منحنی مرز پایداری مربوط به ورق تحت اثر دو جرم نقطه‌ای متحرک به فاصله $L_0 = 1m$ و با دوره تناوب عبور از روی ورق $T=(a+L_0)/V$ نشان می‌دهد که این دو منحنی کاملاً بر هم منطبق هستند.

در شکل (۹) اثر تغییر طول جسم صلب متحرک L_0 بر روی نقشه پایداری بررسی شده است. برخلاف نتایج شکل (٦)، (۷) و (۸) که نشان می‌دهند که افزایش هر یک از پارامترهای ξ، Ω_0 و r سبب افزایش ناحیه ناپایدار می‌شود، شکل (۹) نشان می‌دهد که افزایش طول جسم صلب L_0 سبب تقویت پایداری دینامیکی سیستم و کاهش ناحیه ناپایدار می‌شود.



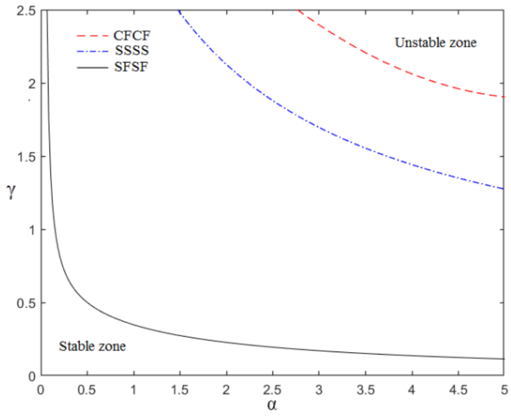
شکل ۱۰ اثر ضخامت ورق h بر روی نقشه پایداری دینامیکی ورق در تماس با سیال تحت اثر جسم صلب نوسان‌کننده متحرک

$(r = 0.2, \xi = 1, \Omega_0 = 20, L_0 = 1m, \bar{m}_f = 1)$

اثر ضخامت ورق بر روی شرایط پایداری دینامیکی سیستم در شکل (۱۰) مورد بررسی قرار گرفته است. همان گونه که ملاحظه می شود کاهش ضخامت ورق سبب تضعیف پایداری سیستم شده و همچنین با کاهش مقدار کافی ضخامت ورق یک زبانه ناپایدار به سطح ناحیه ناپایدار در صفحه پارامترها افزوده می‌شود.

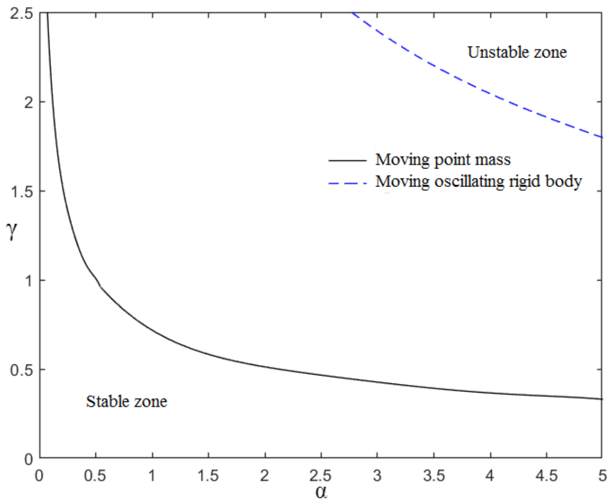
در شکل (۱۱) اثر سه شرط مرزی (SFSF)، (SSSS) و (CFCF) بر روی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار سیستم ورق–جسم صلب متحرک مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. همان گونه که ملاحظه می‌شود ورق با شرایط مرزی (SFSF) و (CFCF) به ترتیب بیشترین و کمترین ناحیه ناپایدار را به خود اختصاص داده اند. به این ترتیب ملاحظه می‌شود که با تنظیم قیود تکیه‌گاهی می‌توان سبب تقویت پایداری دینامیکی سیستم شد.

در شکل (۱۲) نتایج آنالیز پایداری دینامیکی حاصل از در نظر گرفتن دو مدل جرم نقطه‌ای متحرک و جسم صلب نوسان کننده با هم مقایسه شده است. تفاوت بین منحنی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار به دست آمده از هر دو مدل جسم متحرک، مبین اثر قابل ملاحظه شیوه مدل‌سازی جسم متحرک بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم ورق– جسم متحرک و اهمیت انتخاب مدل مناسب برای جسم متحرک برای به دست آوردن نتایج صحیح در آنالیز پایداری است.



شکل ۱۱ اثر شرایط مرزی بر روی نقشه پایداری دینامیکی ورق در تماس با سیال تحت اثر جسم صلب نوسان‌کننده متحرک

$(r = 0.1, \xi = 1, \Omega_0 = 100, L_0 = 1m, \bar{m}_f = 1)$

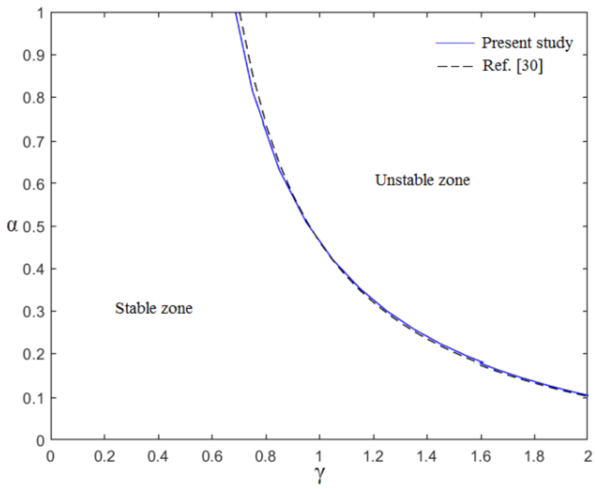


شکل ۱۲ مقایسه بین نتایج آنالیز پایداری دینامیکی ورق در تماس با سیال حاصل از دو مدل جرم نقطه‌ای متحرک و جسم صلب نوسان‌کننده متحرک با مشخصه $(r=0.05, \xi=1, \Omega_0=100, L_0=1, \bar{m}_f = 1)$

صحت‌سنجی نتایج

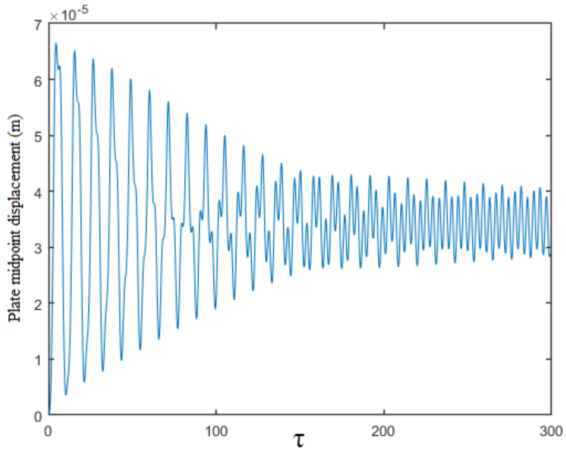
صحت نتایج این تحقیق به دو روش مورد بررسی قرار می‌گیرد. در روش اول مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار حاصل از این مطالعه برای سیستم ورق–جرم متحرک نقطه‌ای با نتیجه متناظر در مطالعه دیگر مقایسه می‌شود و در روش دوم از طریق شبیه‌سازی پاسخ دینامیکی نقطه میانی ورق به ازای نقاط متعلق به نواحی پایدار و ناپایدار صحت نتیجه به دست آمده برای مرز بین این دو ناحیه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای ورق مربعی واقع در خلأ، با شرایط تکیه‌گاهی ساده، به ضلع ۲ متر، ضخامت ۰/۳ متر، مدول الاستیسیته ۲۰۰Gpa، چگالی ۷۸۵۰ kg/m^3 و تحت عبور متوالی جرم متحرک نقطه‌ای از روی خط میانی ورق، مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار سیستم ورق–جرم متحرک نقطه‌ای به دست آمده از روش تئوری فلاکه در مطالعه حاضر با نتیجه متناظر به دست آمده از روش هارمونیک بالانس نموی در مرجع [30] در شکل (۱۳) با هم مقایسه شده‌اند. این مقایسه نزدیکی دو مرز به دست آمده را نشان می‌دهد و به این ترتیب نتیجه به دست آمده از مطالعه حاضر مورد تأیید قرار می‌گیرد.

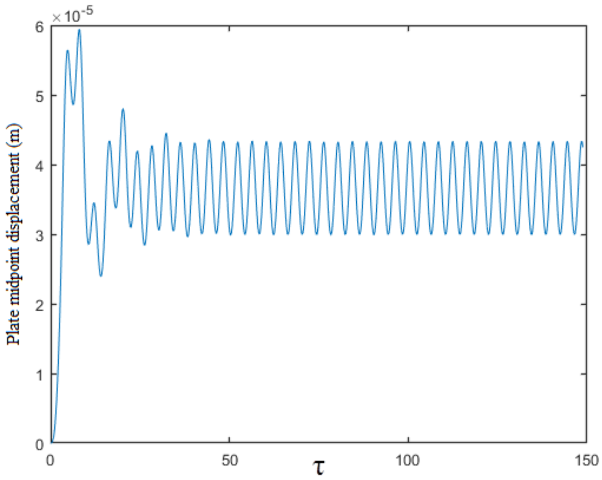


شکل ۱۳ مقایسه بین نتیجه آنالیز پایداری دینامیکی ورق در خلأ تحت عبور جرم متحرک نقطه‌ای حاصل از مطالعه حاضر و مرجع [30]

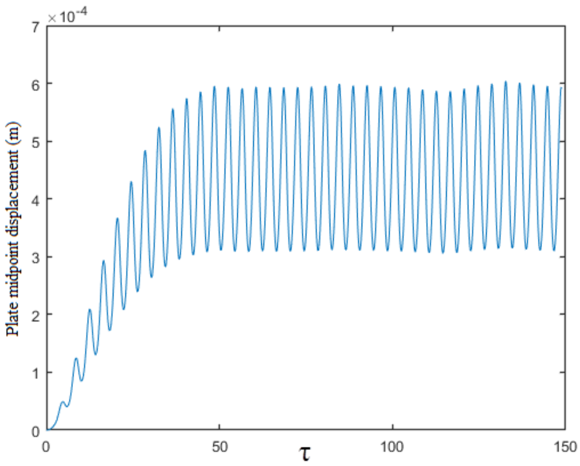
به منظور بررسی صحت نتایج در روش دوم، به عنوان نمونه، نتایج شکل (۷) با به‌کارگیری معادله (۳۱) از طریق شبیه‌سازی پاسخ دینامیکی نقطه میانی ورق بررسی می‌شود. پاسخ دینامیکی نقطه میانی ورق به عبور متوالی جسم‌های صلب متحرک با مشخصه $r=0.05, \xi=1, L_0=1m$ و $\alpha=3, \gamma=1$ واقع در ناحیه پایدار $\Omega_0=10,100,500$ و ناحیه ناپایدار $\Omega_0=1000$ و $\Omega_0 \to \infty$ در شکل (۱٤) نشان داده شده است. همان گونه که ملاحظه می‌شود پاسخ در شکل‌های (۱٤–الف)، (۱٤–ب) و (۱٤–ج) محدود و پایدار و در شکل‌های (۱٤–د) و (۱٤– ر) فزاینده و ناپایدار است و به این ترتیب نتایج به دست آمده در شکل (۷) مورد تأیید قرار می‌گیرند.



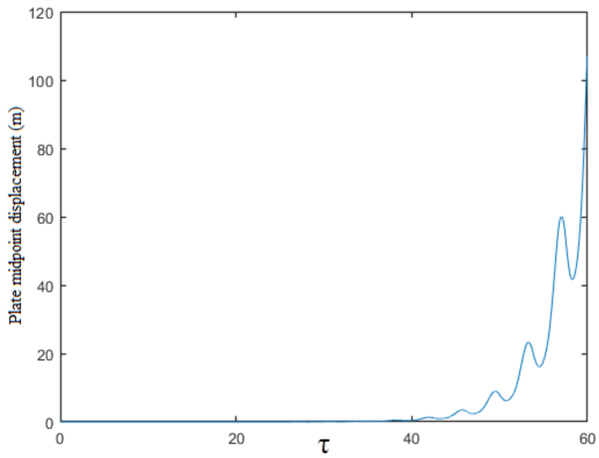
(الف)



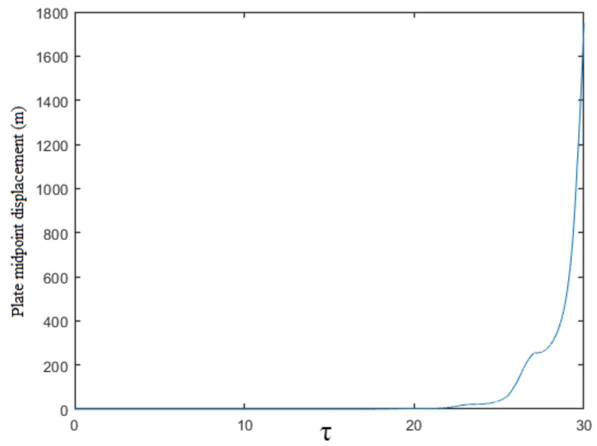
(ب)



(ج)



(د)



(ه)

شکل ١٤ شبیه‌سازی پاسخ دینامیکی نقطه میانی ورق در تماس با سیال تحت عبور متناوب جسم‌های صلب نوسان کننده

$(r = 0.05, \xi = 1, L_0 = 1m, \bar{m}_f = 1, \alpha=3, \gamma=1)$

(الف) $\Omega_0 = 10$ (ب) $\Omega_0 = 100$ (ج) $\Omega_0 = 500$ (د) $\Omega_0 = 1000$

(ه) $\Omega_0 \to \infty$

جمع‌بندی

در این پژوهش، با استفاده از روش تئوری فلاکه پایداری یک ورق نسبتاً ضخیم مستطیلی در تماس با سیال تحت اثر عبور متناوب جسم‌های متحرک مورد بررسی قرار گرفته است. در مدل در نظر گرفته شده برای جسم متحرک، شاسی جسم متحرک به صورت یک جسم صلب با طول معین در نظر گرفته شده که از هر دو انتها از طریق یک سیستم تعلیق یکسان به چرخی متصل شده است. معادلات دیفرانسیل متغیر با زمان حاکم بر ارتعاشات سیستم با استفاده از تئوری ورق میندلین و روش مودهای فرضی به دست آمده‌اند و نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم از طریق تعیین مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار در صفحه پارامترهای سیستم معرفی شده‌اند. اثر تماس سیال با ورق، ضخامت و شرایط مرزی ورق و همچنین اثر سختی و میرایی سیستم تعلیق، نسبت جرم چرخ به جرم جسم متحرک و طول جسم متحرک بر روی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار بررسی شده است. به منظور بررسی اثر شیوه مدل‌سازی جسم متحرک بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی، با در نظر گرفتن مدل جرم نقطه‌ای، آنالیز پایداری دینامیکی سیستم نیز انجام شده و با نتیجه حاصل از در نظر گرفتن مدل جسم صلب نوسان کننده مقایسه شده است. نتایج به‌دست آمده را به شرح زیر می‌توان جمع‌بندی کرد.

١. نتایج نشان می‌دهند که تماس سیال با ورق، شرایط مرزی و ضخامت ورق، پارامترهای سختی و میرایی سیستم تعلیق، نسبت جرم چرخ به جرم کل جسم متحرک و طول جسم صلب نوسان کننده متحرک بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی دارای اثر قابل ملاحظه هستند.
٢. افزایش مقدار پارامتر بدون بعد جرم افزوده سبب تقویت پایداری دینامیکی سیستم ورق در تماس با سیال- جرم متحرک می‌شود.
٣. قیود تکیه‌گاهی ورق اثر قابل ملاحظه‌ای بر روی شرایط پایداری دینامیکی ورق دارد و تنظیم مناسب قیود تکیه‌گاهی سبب تقویت پایداری سیستم ورق– جسم متحرک می‌شود.
٤. کاهش ضخامت ورق سبب گسترش ناحیه ناپایدار و تضعیف پایداری سیستم می‌شود و با کاهش کافی مقدار ضخامت ورق، یک زبانه ناپایدار نیز به ناحیه ناپایدار در صفحه پارامترها افزوده می‌شود.
٥. افزایش میرایی دمپر یا سختی فنر سیستم تعلیق و افزایش نسبت جرم چرخ به جرم کل جسم متحرک سبب رشد ناحیه ناپایدار و تضعیف پایداری سیستم می‌شود.
٦. ملاحظه می‌شود که افزایش طول جسم صلب سبب تقویت پایداری دینامیکی سیستم و کاهش ناحیه ناپایدار می‌شود.
٧. مقایسه بین نتایج پایداری دینامیکی به دست آمده برای سیستم ورق-جسم متحرک حاصل از هر دو مدل جرم نقطه‌ای متحرک و جسم صلب نوسان کننده متحرک نشان می‌دهد که شیوه مدل‌سازی جسم متحرک اثر قابل ملاحظه‌ای بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم دارد و عدم انتخاب مدل مناسب برای جسم متحرک سبب به دست آمدن نتایج نادرست

در آنالیز پایداری می‌شود.

تقدیر و تشکر

فهرست علایم

a	طول ورق
b	عرض ورق
h	ضخامت ورق
h_f	عمق سیال
x,y,z	مؤلفه‌ها در دستگاه مختصات
t	زمان
$w(x,y,t)$	جابه‌جایی در جهت محور z
$u_x(x,y,t)$	جابه‌جایی در جهت محور x
$u_y(x,y,t)$	جابه‌جایی در جهت محور y
E	مدول الاستیسیته ورق
$\bar{L}$	پارامتر بدون بعد طول
G	مدول برشی ورق
M	جرم جسم نقطه‌ای متحرک
M_1	جرم چرخ جسم صلب متحرک
M_2	جرم شاسی جسم صلب متحرک
m_f	جرم افزوده
$\bar{m}_f$	پارامتر بدون بعد جرم افزوده
p	فشار دینامیکی سیال
L_0	طول شاسی جسم صلب متحرک
$\bar{I}$	گشتاور اینرسی حول مرکز جرم
k	سختی فنر سیستم تعلیق
c	میرایی دمپر سیستم تعلیق
(x_1,y_1,w_1)	مختصات چرخ جلو
(x_2,y_2,w_2)	مختصات چرخ عقب
$H(t)$	تابع هیویساید
$\hat{t}_1$	لحظه ورود چرخ جلو روی ورق
$\hat{t}_2$	لحظه ترک ورق توسط چرخ جلو
$\hat{t}_3$	لحظه ورود چرخ عقب روی ورق
$\hat{t}_4$	لحظه ترک ورق توسط چرخ عقب
$A_k^w(t)$	مختص k ام نظیر شکل مود φ_k^w
$A_k^{\psi_x}(t)$	مختص k ام نظیر شکل مود $\varphi_k^{\psi_x}$
$A_k^{\psi_y}(t)$	مختص k ام نظیر شکل مود $\varphi_k^{\psi_y}$
n	تعداد مختص مودال
$\delta w_{n.c.}$	کار نیروی غیرکنسرواتیو
W_A, W_B	جابه‌جایی دو انتهای جسم صلب
$Q_{n.c.}$	نیروی تعمیم یافته غیرکنسرواتیو
L	لاگرانژین
V	سرعت جسم متحرک
T_p	زمان تناوب
r	نسبت جرم چرخ‌ها به جرم کل جسم

علایم یونانی

α	پارامتر بدون بعد جرم
γ	پارامتر بدون بعد سرعت
Ω_0	پارامتر فرکانسی جسم صلب
ξ	پارامتر بدون بعد میرایی
Ω	پارامتر فرکانسی ورق
ρ	چگالی ورق
ρ_f	چگالی سیال
ν	ضریب پواسون
δ_0	تغییر استاتیکی
χ_1, χ_2	ضرایب وابسته به تابع هیویساید
θ	زاویه چرخش جسم صلب حول محور موازی با صفحه ورق
ψ	زاویه چرخش جسم صلب حول محور عمود بر صفحه ورق
ψ_x	جابه‌جایی زاویه‌ای حول محور y
ψ_y	جابه‌جایی زاویه‌ای حول محور x
$\varphi_k^w(x,y)$	شکل مود k ام نظیر جابه‌جایی w
$\varphi_k^{\psi_x}(x,y)$	شکل مود k ام نظیر جابه‌جایی ψ_x
$\varphi_k^{\psi_y}(x,y)$	شکل مود k ام نظیر جابه‌جایی ψ_y

واژه نامه

پایداری دینامیکی	Dynamic Stability
تئوری فلاکه	Floquet Theory
ورق میندلین	Mindlin Plate

جرم افزوده	Added Mass	برهمکنش سیال – سازه	Fluid–Structure Interaction
دامنه ارتعاشی	Vibration Amplitude		
جسم صلب نوسان کننده	Oscillating Rigid Body		

مراجع

[1] Y. B. Yang, J. D. Yau, and Y. S. Wu, *Vehicle Bridge Interaction Dynamics: With Applications to High Speed Railways*, World Scientific Company, 2004.

[2] I. Gerdemeli, I. Esen, and D. Ozer, "Dynamic response of an overhead crane beam due to a moving mass using moving finite element approximation," *Key Engineering Materials*, vol. 450, Pp. 99-102, 2010.

[3] T. N. Shiau, and K. H. Huang, F. C. Wang, and W. C. Hsu, "Dynamic response of a rotating multi-span shaft with general boundary conditions subjected to a moving load," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 323, no. 3-5, Pp. 1045-1060, 2009.

[4] L. Fryba, *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Thomas Telford, 1999.

[5] A. Nikkhoo, and F. R. Rofooei, "Parametric study of the dynamic response thin rectangular plates traversed by a moving mass," *Journal Achta Mechanica*, vol. 223, no. 1, Pp. 15-27, 2011.

[6] T. Ghazvini, A. Nikkhoo, H. Allahyari, and M. Zapulli, "Dynamic response analysis of thin rectangular plate of varying thickness to traveling inertia loads," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 38, Pp. 403-411, 2015.

[7] I. Essen, "A New finite element for transverse vibration of rectangular thin plates under a moving mass," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 66, Pp. 26-35, 2013.

[8] Q. Song, J. Shi, Z. Liu, and Y. Wan, "Dynamic analysis of rectangular thin plates of arbitrary boundary conditions under moving loads," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 117, Pp. 16-29, 2016.

[9] H. Kashani Rad, M. Ghalehnovi, and H. Shariatmadar, "Boundary characteristic orthogonal polynomials method in the vibration analysis of multi-span plates acting upon a moving mass," *Heliyon*, vol. 5, no. 6, Pp. 104537, 2019.

[10] A. H. Karimi, S. Alahdadi, and M. Ghayour, "Dynamic analysis of a rectangular plate subjected to a mass moving with variable velocity on a predefined path or an arbitrary one," *Thin–Walled Structures*, vol. 160, Pp. 107340, 2021.

[11] N. D. Beskou, E. V. Muho, and J. Qian, "Dynamic analysis of an elastic plate on a cross-anisotropic elastic half-space under a rectangular moving load," *Acta Mechanica*, vol. 231, Pp. 4735-4759, 2020.

[12] S. Seifoori, A. Mahdian Parrany and S. Darvishinia, "Experimental studies on the dynamic response of thin rectangular plates subjected to moving mass," *Journal of Vibration and Control*, vol. 27, no. 5-6, Pp. 685-697, 2021.

[13] F. G. Canales, and J. L. Mantari, "Vibrational behavior of isotropic plate structures in contact with a bounded fluid via unified formulation," *Chinese Journal of Aeronautics*, vol. 32, no. 4, Pp. 155-171, 2019.

[14] K. Khorshidi, F. Akbari, and H. Ghadirian, "Experimental and analytical modal studies of vibrating rectangular plates in contact with a bounded fluid," *Ocean Engineering*, vol. 140, Pp. 146-154, 2017.

[15] S. A. Bochkarev, A. O. Kamenskikh, and S. V. Lekomtsev, "Experimental investigation of natural and harmonic vibrations of plates interacting with air and fluid," *Ocean Engineering*, vol. 206, Pp. 107341, 2020.

[16] H. C. Li, L. L. Ke, Z. M. Wu, and J. Yang, "Free vibration of FGM mindlin plates submerged in fluid," *Engineering Structures*, vol. 259, Pp. 114144, 2022.

[17] C. Y. Liao, and C. C. Ma, "Vibration characteristics of rectangular plate incompressible inviscid fluid," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 362, Pp. 228-251, 2016.

[18] Y. Kerboua, A. A. Lakis, M. Thomas, and L. Marcouiller, "Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 32, no. 12, Pp. 2570-2586, 2008.

[19] S. Soni, N. K. Jain, P. V. Joshi, "Vibration analysis of partially cracked plate submerged in fluid," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 412, Pp. 28-57, 2018.

[20] S. Yousefzadeh, A. Akbari, and M. Najafi, "Hydro-elastic vibration analysis of functionally graded rectangular plate in contact with stationary fluid," *European Journal of Computational Mechanics*, vol. 27, no. 3, Pp. 229-246, 2018.

[21] S. Yousefzadeh, A. Akbari, and M. Najafi, "Dynamic response of FG rectangular plate in contact with stationary fluid under moving load," *Journal of Science and Technology of Composites*, vol. 6, no. 2, Pp. 213-224, 2019. (In Persian)

[22] H. D. Nelson, and R. A. Conover, "Dynamic stability of a beam carrying moving masses," *Applied Mechanics*, vol. 38, no. 4, Pp. 1003-1006, 1971.

[23] O. J. Aldraiham, and A. Baz, "Dynamic stability of stepped beams under moving loads," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 250, no. 5, Pp. 835–848, 2002.

[24] S. Mackertich, "Dynamic stability of a beam excited by a sequence of moving mass particles," *Acoustical Society of America*, vol. 115, no. 4, Pp. 1416-1419, 2004.

[25] G. V. Rao, "Linear dynamics of an elastic beam under moving loads," *Journal of Vibration and Acoustics k*, vol. 122, no. 3, Pp. 281–289, 2000.

[26] M. Ebrahimzadeh Hassanabadi, K. A. Attari, A. Nikkhoo, and S. Mariani, "Resonance of a rectangular plate influenced by sequential moving masses," *Coupled Systems Mechanics*, vol. 5, no. 1, Pp. 87–100, 2016.

[27] F. R. Rofooei, and A. Nikkhoo, Attapangittya, "Application of active piezoelectric patches in controlling the dynamic response of a thin rectangular plate under a moving mass," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, no. 11-12, Pp. 2429–2443, 2009.

[28] A. Nikkhoo, M. Ebrahimzadeh Hassanabadi, S. E. Azam, and J. V. Amiri, "Vibration of a thin rectangular plate subjected to series of moving inertial loads," *Mechanical Research Communication*, vol. 55, Pp. 105-113, 2014.

[29] E. Torkan, M. Pirmoradian, and M. Hashemian, "Stability analysis of transverse vibrations of rectangular plate under periodic passage of moving masses," *Journal of Mechanical Engineering and Vibration*, vol. 8, no. 3, Pp. 18–26, 2017. (In Persian)

[30] E. Torkan, M. Pirmoradian, and M. Hashemian, "Instability inspection of parametric vibrating rectangular mindlin plates lying on winkler foundations under periodic loading of moving masses," *Acta Mechanica Sinica*, vol. 35, no. 1, Pp. 242–263, 2019.

[31] M. Pirmoradian, H. Karimpour, "Nonlinear effects on parametric resonances of a beam subjected to periodic mass transition," *Modares Mechanical Engineering*, vol. 17, no. 1, Pp. 284-292, 2017. (In Persian)

[32] J. V. Amiri, A. Nikkhoo, M. R. Davoodi, and M. Ebrahimzadeh Hassanabadi, "Vibration analysis of a mindlin elastic plate under a moving mass excitation by eigenfunction expansion method," *Thin-Walled Structures*, vol. 62, Pp. 53-64, 2013.

[33] M. Hashemian, M. Falsafioon, M. Pirmoradian, and D. Toghraie, "Nonlocal dynamic stability analysis of a timoshenko nanobeam subjected to a sequence of moving nanoparticles considering surface effects," *Mechanics of Materials*, vol. 148, Pp. 103452, 2020.

[34] M. Pirmoradian, E. Torkan, M. Hashemian, and D. Toghraie, "Out‑of‑plane dynamic Instability of Nonlocal Shear Deformable Nanoplates Made of Polyvinylidene Fluoride Materials subjected to electromechanical forces," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 43, no. 145, Pp. 1-23, 2021.

[35] H. D' Angelo, *Linear Time-Varying System: Analysis and Synthesis*, Allyn and Bacon, 1970.